PHƯƠNG PHÁP DỒN BIẾN

Phan Thành Việt

Nội dung:

1. Giới thiệu.

Các bạn thân mến, rất nhiều trong số các BĐT mà ta đã gặp có dấu đẳng thức khi các biến số bằng nhau. Một ví dụ kinh điển là

Ví dụ 1: (BĐT Cauchy) Cho $x, y, z > 0$ thì $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$.

Có thể nói số lượng BĐT như vậy nhiều đến nỗi nhiều bạn sẽ thấy điều đó là ... hiển nhiên. Tất nhiên, không hẳn như vậy. Tuy nhiên, trong trường hợp đẳng thức không xảy ra khi tất cả các biến bằng nhau thì ta lại rất thường rơi vào một trường hợp khác, tổng quát hơn: đó là có một số (thay vì tất cả) các biến bằng nhau. Ở đây chúng tôi dẫn ra một ví dụ sẽ được chứng minh ở phần sau.

Ví dụ 2: (VMO) Cho $x, y, z \in R$, $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Thì

$$2(x + y + z) - xyz \leq 10$$

Trong BĐT này thì dấu "=" xảy ra khi $x = y = 2, z = -1$ (và các hoán vị).

Có thể nhiều bạn sẽ ngạc nhiên khi biết rằng còn có những bất đẳng thức mà dấu "=" xảy ra khi các biến đều khác nhau. Ví dụ sau đây cũng sẽ được chứng minh ở phần sau.

Ví dụ 3: (Jackgarfukel) Cho a, b, c là 3 số thực không âm và có tối đa một số bằng 0. Thì ta luôn có:

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} \leq \frac{5}{4}\sqrt{a+b+c}$$

Ở đây, dấu đẳng thức xảy ra khi $a = 3b > 0, c = 0$ (và các dạng hoán vị). Các bạn có thể tự hỏi là các giá trị chẳng hạn như $(3, 1, 0)$ có gì đặc biệt mà làm cho đẳng thức xảy ra. Một cách trực giác, ta thấy dường như điểm đặc biệt đó là do có một biến bằng 0. Vì giả thiết là các biến không âm, nên biến bằng 0 còn được gọi là biến có giá trị trên biên.

Tóm lại, trong các BĐT mà ta gặp, có các trường hợp dấu "=" xảy ra rất thường gặp: đó là trường hợp tất cả các biến bằng nhau (ta gọi là "cực trị đạt được tại tâm"), tổng quát hơn là trường hợp có một số các biến bằng nhau (ta gọi là "cực trị đạt được có tính đối xứng"), một trường hợp khác là dấu "=" xảy ra khi có một biến có giá trị trên biên (và ta gọi là "cực trị đạt được tại biên").

Phương pháp dồn biến được đặt ra để giải quyết các BĐT có dạng như trên. Ý tưởng chung là: nếu ta đưa được về trường hợp có hai biến bằng nhau, hoặc là một biến có giá trị tại biên, thì số biến sẽ giảm đi. Do đó BĐT mới đơn giản hơn BĐT ban đầu, đặc biệt nếu BĐT mới chỉ còn một biến thì bằng cách khảo sát hàm một biến số ta sẽ chứng minh BĐT khá đơn giản. Chính vì tư tưởng là giảm dần số biến nên phương pháp này được gọi là phương pháp dồn biến.

Bây giờ chúng tôi sẽ trình bày các kĩ thuật chính của phương pháp thông qua các bài toán cụ thể. Đối tượng rất quan trọng mà chúng tôi muốn bạn đọc nắm bắt là các BĐT với 3 biến số. Sau đó, các mở rộng cho 4 biến sẽ được trình bày. Cuối cùng, chúng ta đến với các phương pháp dồn biến tổng quát cho n biến số, trong đó bạn đọc sẽ cùng chúng tôi đi từ những kết quả "cổ điển" tới những cải tiến nhỏ và sau đó là một kết quả

hết sức tổng quát. Tinh thần xuyên suốt của chúng tôi là muốn bạn đọc cảm nhận được tính tự nhiên của vấn đề. Qua đó, các bạn sẽ lý giải được "tại sao", để rồi có thể tự mình bước đi trên con đường sáng tạo.

**Ghi chú:* Chúng tôi sẽ đánh dấu các bài toán theo từng mục. Vì số lượng các định lý là rất ít nên chúng tôi không đánh dấu. Chúng tôi cố gắng ghi tên tác giả và nguồn trích dẫn đối với tất cả các kết quả quan trọng, ngoại trừ những kết quả của chúng tôi.

2. BĐT 3 biến với cực trị đạt được đối xứng.

Xin phác họa lại tư tưởng của chúng ta như sau. Bài toán của chúng ta sẽ có dạng $f(x, y, z) \geq 0$ với x, y, z là các biến số thực thỏa mãn các tính chất nào đấy. Điều chúng ta mong muốn là sẽ có đánh giá $f(x, y, z) \geq f(t, t, z)$ với t là một đại lượng thích hợp tùy theo mối liên hệ giữa x, y, z (ta sẽ gọi đây là kĩ thuật dồn về 2 biến bằng nhau). Sau đó chúng ta kiểm tra $f(t, t, z) \geq 0$ để hoàn tất chứng minh. Lưu ý rằng nếu các biến đã được chuẩn hóa thì bước cuối chỉ là bài toán với một biến.

Trong mục này, chúng ta sẽ chỉ xem xét các ví dụ cơ bản nhất.

Bài toán 1. (BĐT Cauchy) Cho $x, y, z > 0$, chứng minh rằng

$$x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$$

Lời giải:

Vì BĐT là đồng bậc nên bằng cách chuẩn hóa ta có thể giả sử $x+y+z = 1$ (*). Viết lại bài toán dưới dạng $f(x, y, z) \geq 0$ với $f(x, y, z) = 1 - 27xyz$. Ta thấy rằng khi thay x và y bởi $t = \frac{x+y}{2}$ thì điều kiện (*) vẫn bảo toàn (tức là vẫn có $t + t + z = 1$), nên ta chỉ phải xem xét sự thay đổi của xyz.

Theo BĐT Cauchy với 2 biến (chứng minh rất đơn giản) thì $xy \leq t^2$, nên $xyz \leq t^2z$. Vậy $f(x, y, z) \geq f(t, t, z)$.

Cuối cùng để ý là $z = 1 - 2t$ nên ta có:

$$f(t, t, z) = 1 - 27t^2z = 1 - 27t^2(1 - 2t) = (1 + 6t)(1 - 3t)^2 \geq 0$$

và bài toán chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi $x = y$ và $3t = 1$, nghĩa là $x = y = 1/3$, tương đương với $x = y = z$.

***Nhận xét:**

1) Có thể nhiều bạn sẽ bỡ ngỡ với cách chuẩn hóa ở trên. Chúng tôi xin nói rõ: không có gì là bí ẩn ở đây cả. Nếu thích, các bạn hoàn toàn có thể chuẩn hóa theo cách khác, chẳng hạn giả sử $xyz = 1$ và chứng minh $f(x,y,z) \geq 0$ với $f(x,y,z) = x+y+z-3$. Khi đó bước dồn biến sẽ là chứng minh $f(x,y,z) \geq f(t,t,z)$ với $t = \sqrt{xy}$. Đề nghị bạn đọc tự lý giải vì sao trong lời giải trên thì ta xét $t = \frac{x+y}{2}$ còn ở đây lại xét $t = \sqrt{xy}$, và sau đó hoàn thành chứng minh theo cách này.

2) Bạn đọc có thể thắc mắc: không cần chuẩn hóa được không? Câu trả lời là: được! Thật vậy, chúng ta vẫn hoàn toàn có thể xét bài toán $f(x,y,z) \geq 0$ với $f(x,y,z) = x+y+z-3\sqrt{xyz}$. Khi đó bước dồn biến sẽ là chứng minh $f(x,y,z) \geq f(t,t,z)$ với $t = \frac{x+y}{2}$ hay $t = \sqrt{xy}$ đều được. Thực chất, điều này hoàn toàn dễ hiểu, nó chỉ là sự tương ứng giữa BĐT có điều kiện và BĐT không điều kiện (qua kĩ thuật chuẩn hóa).

3) Chúng tôi nghĩ là các bạn sẽ đồng ý rằng: nếu một bài toán đã chuẩn hóa (tức là BĐT có điều kiện) thì nó sẽ "gợi ý" cho chúng ta cách dồn biến (phải đảm bảo điều kiện), tuy nhiên, ngược lại một bài toán chưa chuẩn hóa (BĐT không điều kiện) thì chúng ta sẽ có nhiều cách để dồn biến hơn (nói chung, ta sẽ chọn cách dồn biến sao cho bảo toàn được "nhiều" biểu thức nhất trong BĐT - điều này cũng tương đương với chuẩn hóa sao cho biểu thức có dạng đơn giản nhất). Do đó, một sự phối hợp tốt giữa kĩ thuật chuẩn hóa và dồn biến là một điều cần thiết. Tuy nhiên, khi đã quen với những điều này thì các bạn sẽ thấy không có sự khác biệt đáng kể nào giữa chúng.

Bài toán 2. (BĐT Schur) Cho $a, b, c \geq 0$, chứng minh rằng:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b).$$

Lời giải:

Xét $f(a,b,c) = a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - a^2(b+c) - b^2(c+a) - c^2(a+b)$. Đặt $t = \frac{b+c}{2}$, ta hi vọng: $f(a,b,c) \geq f(a,t,t)$. Xét

$$d = f(a,b,c) - f(a,t,t) = \left[b + c - \frac{5}{4}a\right](b-c)^2$$

Ta thấy với a, b, c là các số không âm tùy ý thì không chắc có $d \geq 0$. Tuy nhiên, nếu giả sử $a = \min\{a,b,c\}$ thì ta vẫn có $d \geq 0$. Khi đó ta chỉ còn phải

chứng minh $f(a,t,t) \geq 0$. Nhưng BĐT này tương đương với $a(a-t)^2 \geq 0$ nên hiển nhiên đúng. Bài toán chứng minh xong.

***Nhận xét:** *Việc giả sử $a = min\{a,b,c\}$ là một thủ thuật rất thường được áp dụng để dồn biến. Nhắc lại là nếu BĐT 3 biến đối xứng thì ta có thể giả sử $a \leq b \leq c$ (hoặc $a \geq b \geq c$), còn trong trường hợp BĐT 3 biến hoán vị vòng quanh thì ta có thể giả sử $a = min\{a,b,c\}$ (hoặc $a = max\{a,b,c\}$).*

Bài toán 3. Cho a, b, c là 3 số thực dương có tích bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{6}{a+b+c} \geq 5.$$

Hướng dẫn:

Nếu như 2 bài toán ban đầu là những bài toán quen thuộc, thì đây là một bài toán khó. Với kinh nghiệm thu được từ bài toán 1, chúng ta có thể nghĩ ngay tới việc dồn biến theo trung bình nhân để khai thác giả thiết tích ba số bằng 1. Một lời giải theo hướng đó đã được bạn Yptsoi (Đài Loan) đưa lên trên diễn đàn Mathlinks, mà sau đây chúng tôi xin dẫn lại một cách vắn tắt.

Ta chứng minh được $f(a,b,c) \geq f(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc})$ nếu giả sử $a \geq b \geq c$. Tiếp theo, ta chứng minh rằng $f(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc}) \geq 5$, hay là

$$f\left(\frac{1}{x^2}, x, x\right) \geq 5, \text{ với } x = \sqrt{bc}$$

BĐT này tương đương với $(x-1)^2(2x^4 + 4x^3 - 4x^2 - x + 2) \geq 0$. Vì biểu thức trong ngoặc thứ hai dương với $x > 0$ nên chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Qua các ví dụ trên, chúng ta đã thấy cách dồn biến về trung bình cộng và trung bình nhân thật là hữu dụng. Tuy nhiên, các cách dồn biến là vô cùng phong phú và uyển chuyển. Ví dụ sau đây minh họa cho điều đó.

Bài toán 4.(Iran 1996) Chứng minh rằng với $a, b, c > 0$ thì:

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2}\right) \geq \frac{9}{4}.$$

Hướng dẫn:

Đây là một bài toán rất khó. Các bạn có thể thấy điều đó qua sự kiện

là dấu ”=” đạt được ngoài $a = b = c$ còn có $a = b$, $c \to 0$.

Các bạn nên thử để thấy 2 cách dồn biến thông thường là trung bình cộng và trung bình nhân đều dẫn đến những BĐT vô cùng phức tạp. Lời giải sau đây lấy từ ý của thầy Trần Nam Dũng, mà nếu nhìn kĩ bạn sẽ thấy được mối tương quan, không chỉ trong tính toán mà trong cả tư duy, của các kĩ thuật chuẩn hóa và dồn biến, mà chúng tôi đã đề cập trong nhận xét 3) của bài toán 1.

Vì BĐT là đồng bậc nên ta có thể giả sử $ab + bc + ca = 1$ (*). Bây giờ ta hi vọng có đánh giá $f(a, b, c) \geq \frac{9}{4}$ với $f(a, b, c)$ là biểu thức thứ hai của vế trái BĐT cần chứng minh. Ở đây t phải thỏa mối liên hệ ở (*), nghĩa là $t^2 + 2tc = 1$.

Bằng cách giả sử $c = \min\{a, b, c\}$ ta sẽ chứng minh được $f(a, b, c) \geq f(t, t, c)$. Cuối cùng, ta kiểm tra $f(t, t, c) \geq \frac{9}{4}$. Ở đây bạn đọc có thể thay $c = \frac{1-t^2}{2t}$ vào BĐT để thấy:

$$f(t, t, c) = \frac{(1-t^2)(1-3t^2)^2}{4t^2(1+t^2)} \geq 0$$

Bài toán chứng minh xong!

Nhận xét: *Ở bước cuối, các bạn cũng có thể không chuẩn hóa nữa mà quay lại BĐT đồng bậc:*

$$(t^2 + 2tc)\left(\frac{2}{(t+c)^2} + \frac{1}{4t^2}\right) \geq \frac{9}{4}$$
$$\Leftrightarrow (t^2 + 2tc)(8t^2 + (t+c)^2) - 9(t+c)^2 t^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2tc(t-c)^2 \geq 0$$

Cuối cùng chúng ta đến với một ví dụ mà cực trị không đạt tại tâm, mặc dù BĐT là đối xứng. Các bạn sẽ thấy rằng, trong con đường của chúng ta phần quan trọng nhất là dồn về hai biến bằng nhau, còn sau đó thì cực trị đạt tại tâm hay không không phải là điều mấu chốt.

Bài toán 5. (VMO) Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Chứng minh rằng: $2(x + y + z) - xyz \leq 10$.

Lời giải.

Đặt $f(x, y, z) = 2(x + y + z) - xyz$. Chúng ta hi vọng sẽ có $f(x, y, z) \geq f(x, t, t)$, trong đó $t^2 = (y^2 + z^2)/2$ (*) (chúng tôi nghĩ rằng bây giờ bạn đọc đã tự lý giải được điều này). Lưu ý là trong (*) t có thể nhận 2 giá trị, để

định ý ta hãy xét khi $t \geq 0$.

Ta có: $d = f(x,y,z) - f(x,t,t) = 2(y+z-2t) - x(yz-t^2)$. Ta thấy ngay $y+z-2t \leq 0$ và $yz - t^2 \leq 0$. Do đó để có $d \leq 0$ ta chỉ cần $x \leq 0$.

Từ đó, ta giả sử $x = min\{x,y,z\}$. Xét trường hợp $x \leq 0$. Khi đó ta dồn biến như trên và chỉ còn phải chứng minh $f(x,t,t) \leq 10$. Thay $t = \sqrt{(9-x^2)/2}$ ta có:

$$g(x) = f(x,t,t) = 2x + 2\sqrt{2(9-x^2)} - x(9-x^2)/2$$

Ta có:

$$g'(x) = \frac{3x^2}{2} - \frac{5}{2} - \frac{4x}{\sqrt{18-2x^2}}$$

Giải ra ta thấy phương trình $g'(x) = 0$ chỉ có 1 nghiệm âm là $x = -1$. Hơn nữa g' liên tục và $g'(-2) > 0 > g(0)$ nên suy ra g' đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua điểm $x = -1$. Vậy $\forall x \leq 0$ thì $g(x) \leq g(-1) = 10$ và ta có điều phải chứng minh. Trường hợp này đẳng thức đạt được tại $x = -1, y = z = 2$.

Phần còn lại ta phải giải quyết trường hợp $x > 0$, tức là 3 số x,y,z đều dương. Lúc này dấu BĐT là thực sự và ta chỉ cần đánh giá đơn giản chứ không phải thông qua dồn biến. Nếu $x \geq 3/4$ thì

$$f(x,y,z) = 2(x+y+z) - xyz \leq 2\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)} - (\frac{3}{4})^3 = 2\sqrt{27} - \frac{27}{64} < 10$$

Nếu $x \leq 3/4$ thì

$$f(x,y,z) = 2(x+y+z) - xyz \leq 2(\sqrt{2(y^2+z^2)} + 3/4) \leq= 2(\sqrt{18} + 3/4) < 10$$

Bài toán chứng minh xong!

3. Dồn biến bằng kĩ thuật hàm số.

Đây là một kĩ thuật rất quan trọng của phương pháp dồn biến. Tuy nhiên chúng tôi giới thiệu nó ngay sau phần cơ bản nhất là nhằm trang bị cho các bạn một kĩ thuật cần thiết trước khi đi qua các mục sau. Hơn nữa, chúng tôi nghĩ rằng khi đã quen với nó thì các bạn sẽ không còn phải phân biệt cực trị đạt tại tâm hay tại biên, và do đó mục tiếp theo sẽ nhẹ nhàng hơn.

Trong $2 chúng ta thấy rằng để chứng tỏ $f(x,y,z) \geq f(t,t,z)$ ta chỉ việc xét hiệu $d = f(x,y,z) - f(t,t,z)$ rồi tìm cách đánh giá sao cho $d \geq 0$. Tuy nhiên, đó là vì dạng BĐT quá đơn giản, phù hợp với các biến đổi đại số. Giả sử ta phải làm việc với biểu thức f có dạng, chẳng hạn, như: $f(x,y,z) = x^k + y^k + z^k$ với $k > 0$ thì các cách biến đổi đại số sẽ trở nên rất cồng kềnh và phức tạp.

Kĩ thuật hàm số dùng để giải quyết các trường hợp như vậy. Ý tưởng chính thế này, chẳng hạn để chứng minh $f(x,y,z) \geq f(x,t,t)$ với $t = (y+z)/2$, ta xét hàm: $g(s) = f(x, t+s, t-s)$ với $s \geq 0$. Sau đó chứng minh g tăng với $s \geq 0$ (thông thường dùng công cụ đạo hàm rất tiện lợi), suy ra $g(s) \geq g(0), \forall s \geq 0$, và ta sẽ thu được điều mong muốn. Một trong những ví dụ quen thuộc với các bạn là dồn biến bằng hàm lồi, tuy nhiên dưới đây chúng ta sẽ quan sát kĩ thuật dồn biến trong bối cảnh tổng quát hơn, còn vấn đề về hàm lồi sẽ được trở lại ở một mục sau trong bài toán với n biến.

Chúng tôi nhấn mạnh rằng, đây là một kĩ thuật khó, bởi nó chứa đựng những nét rất tinh tế của phương pháp dồn biến. Những ví dụ sau đây thể hiện rất rõ vẻ đẹp và sức mạnh của phương pháp dồn biến.

Bài toán 1. Cho $k > 0$ và a, b, c là các số không âm và chỉ có tối đa 1 số bằng 0. Chứng minh rằng:

$$(\frac{a}{b+c})^k + (\frac{b}{c+a})^k + (\frac{c}{a+b})^k \geq min\{2, \frac{3}{2^k}\} \qquad (*)$$

Lời giải:

Tất nhiên ta chỉ cần chứng minh BĐT khi $2 = \frac{3}{2^k} \Leftrightarrow k = \frac{ln3}{ln2} - 1$ (các bạn hãy suy nghĩ tại sao BĐT đúng cho trường hợp này lại dẫn đến BĐT đúng cho trường hợp tổng quát). Chú ý với k như trên thì đẳng thức xảy ra tại hai chỗ là $a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$ (và các hoán vị).

Không mất tổng quát có thể giả sử $a + b + c = 1$ và $b \geq c \geq a$. Đặt $t = \frac{b+c}{2}$ và $m = \frac{b-c}{2}$, suy ra $b = t + m, c = t - m, a = 1 - 2t$. Khi đó vế trái BĐT cần chứng minh là:

$$f(m) = \left(\frac{1-2t}{2t}\right)^k + \left(\frac{t+m}{1-t-m}\right)^k + \left(\frac{t-m}{1+m-t}\right)^k$$

Vì $c \geq a$ nên $3t - 1 \geq m \geq 0$, và $1 \geq b + c = 2t$ nên $\frac{1}{2} \geq t \geq \frac{1}{3}$

Ta sẽ khảo sát $f(m)$ trên miền $m \in [0, 3t-1]$ với $t \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ là hằng số.

Ta có:

$$f'(m) = \frac{k(t+m)^{k-1}}{(1-t-m)^{k+1}} - \frac{k(t-m)^{k-1}}{(1+m-t)^{k+1}}$$

$$f'(m) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(t+m)^{k-1}}{(1-t-m)^{k+1}} \geq \frac{(t-m)^{k-1}}{(1+m-t)^{k+1}}$$

$$\Leftrightarrow g(m) := [ln(t-m) - ln(t+m)] - \frac{k+1}{1-k}[ln(1-t-m) - ln(1+m-t)] \geq 0$$

Tiếp tục khảo sát g, ta có:

$$g'(m) = -\left[\frac{1}{t-m} + \frac{1}{t+m}\right] + \frac{k+1}{1-k}\left[\frac{1}{1-t-m} + \frac{1}{1+m-t}\right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2t}{(t-m)(t+m)} + \frac{k+1}{1-k}.\frac{2(1-t)}{(1-t-m)(1+m-t)} \geq 0 \qquad (1)$$

Đánh giá $\frac{k+1}{1-k} \geq 2$, do vậy để chứng minh (1) ta cần chứng minh

$$\Leftrightarrow \frac{-t}{t^2-m^2} + \frac{2(1-t)}{(1-t)^2-m^2} \geq 0 \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow u(m) = -t + 4t^2 - 3t^3 + 3tm^2 - 2m^2 \geq 0$$

Thật vậy, vì $u'(m) < 0$ nên $u(m) \geq u(3t-1) = 2(3t-1)(2t-1)^2 \geq 0$

Vậy $g(m)$ đồng biến suy ra $g(m) \geq g(0) = 0$ suy ra $f'(m) \geq 0$ suy ra $f(m) \geq f(0)$. Nhớ là khi $m = 0$ thì $b = c = t$.

Cuối cùng, ta cần chứng minh $h(t) := f(0) \geq 2$. Viết lại:

$$h(t) = \left(\frac{1-2t}{2t}\right)^k + 2\left(\frac{t}{1-t}\right)^k$$

Ta khảo sát $h(t)$ trên miền $t \in [0, \frac{1}{3}]$. Ta có:

$$h'(t) = \frac{2kt^{k-1}}{(1-t)^{k+1}} - \frac{k}{2^k}.\frac{(1-2t)^{k-1}}{t^{k+1}} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 2^{k+1}t^{2k} \leq [(1-t)(1-2t)]^{k-1} \qquad (2)$$

Trong BĐT cuối, vế trái là hàm đồng biến theo t và vế phải là hàm nghịch biến theo t, và lưu ý là $t \leq \frac{1}{3}$ nên để chứng minh (2) ta cần:

$$2^{k+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2k} \leq [(1-\frac{1}{3})(1-\frac{2}{3})]^{k-1}$$

Bất đẳng thức này đúng, nên $h(t)$ nghịch biến, suy ra

$$h(t) \geq h(\frac{1}{3}) = 2$$

Bài toán được giải quyết trọn vẹn!

Nhận xét: *Để thấy được nét đẹp của bài toán này, chúng tôi xin dẫn ra một số trường hợp riêng của nó, bản thân chúng đã là các bài toán hay và được biết đến một cách rộng rãi.*

1) Trường hợp $k = 1$, ta thu được BĐT Netbit:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Đây là một BĐT rất nổi tiếng. Một cách chứng minh "kinh điển" là:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + 3 = \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{a+c} + \frac{a+b+c}{a+b}$$
$$= (a+b+c)(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b})$$
$$\geq (a+b+c)\frac{9}{(b+c)+(c+a)+(a+b)} = \frac{9}{2}$$

2) Trường hợp $k = \frac{1}{2}$, ta thu được BĐT sau:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq 2$$

Đây cũng là một bài toán rất đẹp, trước đây được biết đến như một BĐT ngược chiều với BĐT Netbit. Có một lời giải rất đơn gản, chỉ dùng BĐT Cauchy:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} = \frac{2a}{2\sqrt{a(b+c)}} \geq \frac{2a}{a+b+c}$$

3) Trường hợp $k \geq \frac{2}{3}$, ta có BĐT sau:

$$(\frac{a}{b+c})^k + (\frac{a}{b+c})^k + (\frac{a}{b+c})^k \geq \frac{3}{2^k}$$

Đây cũng là một bài toán rất đẹp đã được biết đến từ trước như là một mở rộng cho BĐT Netbit (nó cũng từng được đăng trên tạp chí THTT với tên của tác giả là Trần Tuấn Anh). Từ kết quả bài toán tổng quát, ta biết rằng 2/3 không phải là số tốt nhất để có giá trị nhỏ nhất là $3/2^k$. Tuy nhiên, nó là số tốt nhất theo nghĩa có thể áp dụng BĐT Cauchy theo cách sau đây. Để đơn giản chúng tôi trình bày với trường hợp $k = 2/3$.

$$a + b + c = a + \frac{b+c}{2} + \frac{b+c}{2} \geq 3\sqrt[3]{a(\frac{b+c}{2})^2}$$
$$\Rightarrow (\frac{2a}{b+c})^{\frac{2}{3}} \geq \frac{3a}{a+b+c}$$

Cùng với bài toán 1, bài toán sau đây cũng là một trong những ví dụ rất đẹp cho kĩ thuật hàm số.

Bài toán 2. Cho $k > 0$, $a, b, c \geq 0$ và $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$(ab)^k + (bc)^k + (ca)^k \leq max\{3, (\frac{3}{2})^k\} \qquad (*)$$

Lời giải:

Không mất tổng quát có thể giả sử $b \geq c$ (còn việc cho $a = min$ hay max thì tùy theo tình huống, ta sẽ điều chỉnh một cách "hợp lí" khi cần thiết).

Đặt $t = \frac{b+c}{2}$ và $m = \frac{b-c}{2}$ suy ra $b = t + m, c = t - m$. Khi đó vế trái BĐT cần chứng minh trở thành:

$$f(m) = a^k[(t+m)^k + (t-m)^k] + (t^2 - m^2)^k$$

Ta khảo sát $f(m)$ trên miền $m \in [0, t]$. Ta có:

$$f'(m) = ka^k[(t+m)^{k-1} - (t-m)^{k-1}] - 2km(t^2 - m^2)^{k-1}$$
$$f'(m) \geq 0 \Leftrightarrow g(m) := a^k[(t-m)^{1-k} - (t+m)^{1-k}] - 2m \geq 0$$

Tất nhiên ta chỉ cần xét khi $k > 1$ (khi $k \leq 1$ thì bài toán đơn giản). Ta có:

$$g''(m) = a^k k(k-1)[(t-m)^{-k-1} - (t+m)^{-k}] > 0$$

$\Rightarrow g'(m)$ đồng biến, do đó có tối đa một nghiệm trên $(0, t)$. Vì $g(0) = 0, g(t) = +\infty$ nên chỉ có hai khả năng:

$$g(m) > 0 \text{ hoặc } g(m) = -\ 0\ +$$

Tương ứng ta có $f(m)$ đi lên hoặc $f(m)$ đi xuống rồi lại đi lên. Trong trường hợp nào thì cực đại cũng đạt ở biên do đó

$$f(m) \leq max\{f(0), f(t)\}$$

Nhắc lại là $m = 0 \Leftrightarrow b = c = t$ và $m = t \Leftrightarrow c = 0$.

Dễ thấy khi $c = 0$ thì:

$$f(t) = 2(ab)^k \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{2k}$$

nên ta chỉ còn phải xét trường hợp còn lại. Đặt:

$$h(t) := f(0) = 2t^k a^k + t^{2k} = 2t^k(3-2t)^k + t^{2k}$$

Ta có:

$$h'(t) = -4k(3-2t)^{k-1}t^k + 2k(3-2t)^k b^{k-1} + 2kb^{2k-1}$$

$$h'(t) \geq 0 \Leftrightarrow -2\left(\frac{3-2t}{t}\right)^{k-1} + \left(\frac{3-2t}{t}\right)^k + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow u(x) := x^k - 2x^{k-1} + 1 \geq 0 \text{ với } x = \frac{3-2t}{t}$$

Ta có: $u'(x) = [kx - 2(k-1)]x^{k-2}$. Vì $u'(x)$ có tối đa một nghiệm trên R^+ nên $u(x)$ có tối đa 2 nghiệm trong R^+, trong đó một nghiệm là $x = 1$.

Từ đó, ta sẽ giả sử $a = min\{a, b, c\}$. Khi đó ta chỉ việc xét khi $t \geq 1$ và tương ứng sẽ là $x \leq 1$. Vì $u(x)$ chỉ có tối đa 1 nghiệm trong $(0, 1)$ nên $h'(t)$ chỉ có tối đa 1 nghiệm trong $(1, \frac{3}{2})$.

Lưu ý là lưu ý $h'(1) = 0, h'(\frac{3}{2}) > 0$. Do đó, chỉ có hai khả năng hoặc $h(t)$ đồng biến hoặc $h(t)$ có dạng $-0+$. Trong trường hợp nào thì $h(t)$ cũng đạt max tại hai biên, suy ra:

$$h(t) \leq max\{f(1), f(\frac{3}{2})\} = max\{3, (\frac{3}{2})^{2k}\}$$

và bài toán giải quyết xong!

**Nhận xét:* Ở đây chúng tôi không giả thiết $a = min\{a,b,c\}$ ngay từ đầu là muốn nhấn mạnh rằng: việc dồn về 2 biến bằng nhau luôn thực hiện được mà không cần thứ tự sắp được giữa các biến. Tận dụng điều đó, chúng ta có thể làm cách khác để né việc khảo sát bài toán 1 biến.

Thật vậy, như trong chứng minh đã chỉ ra, ta luôn có BĐT sau đây mà không cần giả thiết gì về thứ tự của a,b,c:

$$f(a,b,c) \le max\{(\frac{3}{2})^{2k}, f(a,\frac{b+c}{2},\frac{b+c}{2})\} \qquad (*)$$

Từ đó, với mỗi a,b,c cố định, xét dãy số sau: $(a_0,b_0,c_0) = (a,b,c)$, và $\forall n \in Z^+$ thì ta định nghĩa bằng quy nạp:

$$(a_{2n-1},b_{2n-1},c_{2n-1}) = (a_{2n-2},\frac{b_{2n-2}+b_{2n-2}}{2},\frac{b_{2n-2}+b_{2n-2}}{2})$$

và:

$$(a_{2n},b_{2n},c_{2n}) = (\frac{a_{2n-1}+b_{2n-1}}{2},\frac{a_{2n-1}+b_{2n-1}}{2},c_{2n-1})$$

thì ta có ngay

$$f(a,b,c) \le max\{(\frac{3}{2})^{2k}, f(a_n,b_n,c_n)\}, \forall n \in Z^+$$

Dễ thấy các dãy $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{b_n\}$ đều hội tụ về 1, nên chuyển qua giới hạn ta có điều phải chứng minh.

Kĩ thuật chuyển qua giới hạn như vậy cũng khá tự nhiên. Nó có thể tổng quát lên thành 2 định lý dồn biến tổng quát là SMV và UMV mà chúng tôi sẽ giới thiệu ở phần sau. Cũng sử dụng tính liên tục của hàm số nhưng với kĩ thuật khác, chúng tôi còn đạt được 1 kết quả tổng quát hơn.

Sau khi có (*), còn một cách khác để đạt được điều phải chứng minh mà chỉ cần sử dụng một số hữu hạn lần thay thế. Tuy nhiên, để khỏi trùng lắp chúng tôi sẽ giới thiệu nó trong mục BĐT 4 biến (và các mục sau), khi mà nó thực sự cần thiết.
h Còn trong trường hợp 3 biến, chúng tôi sẽ chỉ sử dụng cách tiếp cận đơn giản nhất (dồn về 1 biến rồi khảo sát), nhằm giữ được tính trong sáng của tư tưởng.

Chúng tôi hi vọng rằng, sau khi đọc kĩ hai bài toán trên, thì các bạn có thể sử dụng kĩ thuật hàm số để dồn biến theo cách bất kì, chứ không nhất

thiết là dồn về trung bình cộng. Sau đây là một ví dụ cho kiểu dồn biến về trung bình nhân.

Bài toán 3: (Phạm Kim Hùng)
$a)$ Cho các số thực dương a, b, c có tích bằng 1 . Chứng minh rằng:
(i) $81(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) \leq 8(a+b+c)^4$
(ii) $64(1+a^3)(1+b^3)(1+c^3) \leq (a+b+c)^6$
Lời giải:
(i). Đặt $f(a,b,c) = 8(a+b+c)^4 - 81(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)$. Ta có thể giả sử $a \geq b$. Xét hàm số $g(t) = f(ta, b/t, c)$ với $t \in [\sqrt{b/a}, 1]$. Ta có:

$$g'(t) = 32(a - \frac{b}{t^2})(ta + \frac{b}{t} + c)^3 - 81(a - \frac{b}{t^2})(ta + \frac{b}{t})(1+c^2)$$

Vì $t \in [\sqrt{b/a}, 1]$ nên $g'(t) \geq 0$ nếu:

$$32(d+c)^3 \geq 81d(1+c^2) \qquad \text{với } d = ta + \frac{b}{t}$$

Ta có: $32(d+c)^3 > 32d(d^2+2dc+3c^2) \geq 32d(3\sqrt[3]{d^4c^2}+3c^2) > 81d(1+c^2)$ (lưu ý là $d^2c \geq 4$)

Vậy $g'(t) \geq 0$ với $t \in [\sqrt{b/a}, 1]$. Do đó: $g(1) \geq g(\sqrt{b/a})$. Vậy $f(a,b,c) \geq f(s,s,c)$ với $s = \sqrt{ab}$. Thay $s = 1/\sqrt{c}$ ta được:

$$\begin{aligned} f(s,s,c) &= f(\frac{1}{\sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c}}, c) = 8(\frac{2}{\sqrt{c}} + c)^4 - 81(1+\frac{1}{c})^2(1+c^2) \\ &= (\frac{\sqrt{c}-1}{c})^2(8c^5 + 16c^{\frac{9}{2}} + 24c^4 + 96c^{\frac{9}{2}} + 87c^3 + 78c^{\frac{5}{2}} + \\ &\qquad +99c^2 + 120c^{\frac{3}{2}} - 21c + 94\sqrt{c} + 47) \\ &\geq 0 \qquad\qquad (\text{đpcm}) \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.
(ii) Bằng cách làm tương tự như trên, bạn đọc có thể tự chứng minh BĐT này. Ở đây chúng tôi xin lưu ý rằng BĐT là thực sự và 64 là hằng số tốt nhất.

Điều cuối cùng mà chúng tôi muốn nói với bạn đọc, đó là từ việc nắm được phương pháp đến việc vận dụng được nó một cách thành thạo là cả một quá trình. Điều cần nhất là các bạn phải có ý chí để thực hiện vấn đề tới nơi tới chốn chứ đừng bỏ dở nửa chừng, dù phải đối mặt với những tính

toán phức tạp. Rồi thành công trước mỗi bài toán sẽ khiến các bạn tự tin hơn. Chúng tôi dẫn ra đây một bài toán mà có thể lời giải của nó sẽ khiến nhiều bạn "khiếp sợ", tuy nhiên chúng tôi hi vọng các bạn sẽ bình tâm để thấy được vẻ đẹp trong sáng của nó ẩn đằng sau những kĩ thuật tính toán lão luyện.

Bài toán 4. Cho $a, b, c \geq 0$, $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$\frac{ab}{3+c^2} + \frac{bc}{3+a^2} + \frac{ca}{3+b^2}$$

Lời giải:

Lời giải sau đây của anh Phan Thành Nam.

Giả sử $a \geq b \geq c$. Đặt $a = s + t, b = s - t$ thì vế trái BĐT cần chứng minh là:

$$f(t) := \frac{c(s-t)}{3+(s+t)^2} + \frac{c(s+t)}{3+(s-t)^2} + \frac{s^2-t^2}{3+c^2}$$

Ta khảo sát $f(t)$ trên miền $t \in [0, s-c]$. Ta có:

$$f'(t) = \frac{-c}{3+(s+t)^2} - \frac{2c(s^2-t^2)}{(3+(s+t)^2)^2} + \frac{c}{3+(s-t)^2} + \frac{2c(s^2-t^2)}{(3+(s-t)^2)^2} - \frac{2t}{3+c^2}$$
$$= \frac{4cst}{uv} + \frac{8cst(s^2-t^2)(u+v)}{u^2v^2} - \frac{2t}{3+c^2} < 0, \forall t \in (0, s-c) \qquad (*)$$

với $u = 3 + (s+t)^2, v = 3 + (s-t)^2$ (BĐT (*) sẽ chứng minh sau).

Vậy $\forall t \in [0, s-c]$ thì:

$$f(t) \leq f(0) = \frac{2cs}{3+s^2} + \frac{s^2}{3+c^2} = \frac{2s(3-2s)}{3+s^2} + \frac{s^2}{3+(3-2s)^2} =: g(s) \qquad (1)$$

Xét $g(s)$ với $s \in [1, \frac{3}{2}]$. Ta có:

$$g'(s) = \frac{24s-12s^2}{(3+(3-2s)^2)^2} + \frac{18-24s-6s^2}{(3+s^2)^2} = \frac{108(s^2-3s+4)(s-1)^2(-s^2-3s+6)}{[3+(3-2s)^2]^2[3+s^2]^2}$$

Dễ thấy $s^2 - 3s + 4 > 0$ và $-s^2 - 3s + 6 = (\frac{\sqrt{33}-3}{2} - s)(s + \frac{\sqrt{33}+3}{2})$ nên $g'(s)$ dương trên $(1, s_0)$ và âm trên $(s_0, \frac{3}{2})$ với $s_0 := \frac{\sqrt{33}-3}{2} = 1,372281323...$

Vậy $\forall s \in [1, \frac{3}{2}]$ thì:

$$g(s) \leq g(s_0) = \frac{11\sqrt{33}-45}{24} \qquad (2)$$

Trong (1) và (2), dấu "=" xảy ra đồng thời tại $t = 0$ và $s = s_0$, tức là $a = b = s_0$ và $c = 3 - 2s_0$.

Vậy giá trị lớn nhất cần tìm là $\frac{11\sqrt{33}-45}{24} = 0,757924546...$, đạt được khi $a = b = \frac{\sqrt{33}-3}{2} = 1,372281323......$, $c = 6 - \sqrt{33} = 0,255437353...$

Để kết thúc, ta chứng minh BĐT (*). Đây là 1 BĐT khá chặt. Ta sẽ chỉ ra với $t \in (0, s - c)$ thì:

$$\frac{4cs}{uv} < \frac{1}{3+c^2} \quad (3) \text{ và } \frac{8cs(s^2-t^2)(u+v)}{u^2v^2} \le \frac{1}{3+c^2} \quad (4)$$

là xong!

Chứng minh (3): Vì $c + 2s = 1$ và $s > 1$ nên $cs < 1$. Hơn nữa $u = 3 + (s+t)^2 > 4$, $v = 3 + (s-t)^2 > 3 + c^2$. Từ đó suy ra (3).

Chứng minh (4): Dùng BĐT Cauchy ta có:

$$u^2v^2 = [[3 + (s + t)]^2[3 + (s - t)]^2]^2 \ge 16(s^2 - t^2), \text{và}$$

$$2cs(u+v)(3+c^2) = 4cs(3+s^2+t^2)(3+c^2) \le \left(\frac{4cs+3+s^2+t^2+3+c^2}{3}\right)^3$$

Thay $c = 3 - 2s$ vào, lưu ý là $t \le s - c = 3s - 3$, ta có:

$$4cs + 3 + s^2 + t^2 + 3 + c^2 \le 4(3-2s)s + 6 + s^2 + (3s-3)^2 + (3-2s)^2$$
$$= 12 + 6(s-1)(s-2) \le 12$$

suy ra $2cs(u+v)(3+c^2) < 4^3$. Vậy:

$$\frac{8cs(s^2-t^2)(u+v)}{u^2v^2} = 4.\frac{s^2-t^2}{u^2v^2}.\frac{2cs(u+v)(3+c^2)}{3+c^2} \le 4.\frac{1}{4^4}.\frac{4^3}{3+c^2} = \frac{1}{3+c^2}$$

và bài toán giải quyết xong!

4. BĐT 3 biến với cực trị đạt được tại biên.

Nếu như trong phần trước chúng ta có thể hiểu "dồn biến" là "đẩy hai biến lại gần nhau", thì trong trường hợp này ta phải hiểu "dồn biến" nghĩa là "đẩy 1 biến ra biên". Chẳng hạn như xét BĐT $f(x, y, z) \ge 0$ với $x, y, z \ge 0$, ta có thể hi vọng vào đánh giá $f(x, y, z) \ge f(0, s, t)$, trong đó s, t là các đại lượng thích hợp sinh ra từ các biến a, b, c (ta sẽ gọi đây

là kĩ thuật dồn 1 biến ra biên). Tất nhiên ta sẽ chọn s, t sao cho hiệu $d = f(x, y, z) \geq f(0, s, t)$ là đơn giản và có thể đánh giá thuận lợi. Cuối cùng ta chỉ việc kiểm chứng $f(0, s, t) \geq 0$.

Trước hết, để các bạn làm quen với cách dồn biến "mới mẻ" này, chúng tôi xin trở lại một ví dụ ở phần trước.

Bài toán 1: (BĐT Schur) Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b).$$

Lời giải:

Trong \$2, bài này đã được giải bằng cách dồn 2 biến về bằng nhau. Tuy nhiên nhận xét là ngoài điểm $a = b = c$, đẳng thức còn đạt tại $a = b, c = 0$ (và các hoán vị). Do đó, kĩ thuật dồn biến ra biên vẫn có khả năng thành công!

Đặt $f(a, b, c) = a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - a^2(b + c) - b^2(c + a) - c^2(a + b)$.

Ta hi vọng sẽ có $f(a, b, c) \geq f(0, a + b, c)$. Xét hiệu:

$$d = f(a, b, c) - f(0, a + b, c) = ab(5c - 4a - 4b)$$

Như vậy là ta không thể có $d \geq 0$, cho dù tận dụng sự kiện là a, b, c có thể được sắp.

Thật đáng tiếc! Tuy nhiên, nếu các bạn dừng lại ở đây thì còn đáng tiếc hơn. Thay vì bỏ dỡ, ta hãy xem lại vì sao không thể có $d \geq 0$. Nếu tinh ý, các bạn có thể thấy là $f(a, b, c)$ sẽ nhỏ đi khi hai biến tiến lại gần nhau (đó chính là lý do mà ta có thể dồn về hai biến bằng nhau như trong \$2), còn ở đây khi thay bộ (a, b, c) bởi $(0, a + b, c)$ thì "dường như" các biến càng cách xa nhau. Đó chính là lý do cách dồn biến ở trên thất bại.

Từ đó, ta nảy ra ý là thay (a, b, c) bởi $(0, b + a/2, c + a/2)$. Xét hiệu:

$$d_a = f(a, b, c) - f(0, b + a/2, c + a/2) = a(a + b - 2c)(a + c - 2b)$$

Điều thú vị là ta có thể giả sử $d_a \geq 0$. Thật vậy, điều này cũng nhờ việc sắp thứ tự nhưng không phải là giữa các biến a, b, c mà là giữa các hiệu d_a, d_b, d_c (trong đó d_b, d_c là hai hiệu tương tự như d_a). Vì tính đối xứng nên ta có thể giả sử $d_a = max\{d_a, d_b, d_c\}$. Khi đó nếu $d_a < 0$ thì

$$0 > d_a d_b d_c = abc(b + c - 2a)^2(c + a - 2b)^2(a + b - 2c)^2$$

và mâu thuẫn!

Vậy $d_a \geq 0$ nên $f(a, b, c) \geq f(0, s, t)$ với $s = b + a/2, t = c + a/2$. Cuối cùng, ta thấy

$$f(0, s, t) = t^3 + s^3 - t^2 s - ts^2 = (t + s)(t - s)^2 \geq 0$$

và chứng minh được hoàn tất.

***Nhận xét:** *Mặc dù BĐT Schur quá quen thuộc, nhưng cách chứng minh bằng dồn biến mới chỉ được chú ý gần đây. Tuy nhiên, nếu như cách dồn về hai biến bằng nhau có vẻ khá "hợp lý", thì cách dồn một biến ra biên là một kết quả thực sự bất ngờ. Tất nhiên, chứng minh trên không phải là cách ngắn gọn nhất, nhưng ở đây chúng tôi muốn nhấn mạnh đến sự tự nhiên của nó.*

Nếu như trong bài toán 1 việc áp dụng kĩ thuật dồn biến ra biên gây bất ngờ, thì trong bài toán sau nó là một con đường tất yếu.

Bài toán 2: (Hojoo Lee) Cho $a, b, c \geq 0$, $ab + bc + ca = 1$ (*). Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{5}{2}$$

Lời giải:

Bài này đẳng thức không xảy ra tại tâm, mà tại $a = b = 1, c = 0$ và các hoán vị. Xét một trường hợp riêng khi $c = 0$, thì bài toán trở thành:

$$\text{"\textit{Chứng minh rằng: }} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{5}{2}, \text{\textit{ với }} ab = 1."$$

Đặt $s = a+b$ thì điều trên tương đương với $s + \frac{1}{s} \geq \frac{5}{2}$, hay $(2s-1)(s-2) \geq 0$. BĐT cuối là hiển nhiên vì $s = a + b \geq 2\sqrt{ab} = 2$.

Vậy bây giờ ta chỉ cần dồn một biến về 0 nữa là xong. Cách làm sau đây lấy từ ý của anh Phạm Kim Hùng trên Diễn Đàn Toán Học.

Đặt $f(a, b, c)$ là vế trái BĐT cần chứng minh. Ta hi vọng $f(a, b, c) \geq f(a + b, \frac{1}{a+b}, 0)$ (chú ý là cách lấy này nhằm đảm bảo điều kiện $(*)$). Xét

hiệu:

$$\begin{aligned}
&d = f(a,b,c) - f(a+b, \frac{1}{a+b}, 0)\\
&= \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+\frac{1-ab}{a+b}} + \frac{1}{b+\frac{1-ab}{a+b}}\right) - \left(\frac{1}{a+b} + a + b + \frac{1}{a+b+\frac{1}{a+b}}\right).\\
&= \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} - 1 - \frac{1}{1+(a+b)^2}
\end{aligned}$$

Từ đó quy đồng lên ta thấy $d \geq 0$ nếu $2(1-ab) \geq ab(a+b)^2$. Nếu giả sử $c = max\{a,b,c\}$ thì $2(1-ab) = 2c(a+b) \geq ab(a+b)^2$. Vậy lúc này $d \geq 0$ và bài toán chứng minh xong!

***Nhận xét:**

1) Lời giải đầy tiên được đưa ra trên Diễn Đàn Toán Học là của anh Phan Thành Nam, một cách chứng minh rất ngắn gọn. Đặt $x = a+b+c$.

Nếu $x \geq 2$ thì:

$$\frac{1}{a+b} = c + \frac{ab}{a+b} \geq c + \frac{ab}{a+b+c} \Rightarrow f(a,b,c) \geq x + \frac{1}{x} \geq \frac{5}{2}$$

Nếu $x \leq 2$ thì giả sử $a = max\{a,b,c\}$ ta có:

$$\begin{aligned}
f(a,b,c) &= (c + \frac{ab}{a+b}) + (b + \frac{ac}{a+c}) + \frac{1}{b+c}\\
&= (b + c + \frac{1}{b+c}) + \frac{a(1+bc)}{ax+bc} \geq 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

(lưu ý là $2a(1+bc) = 2a + 2abc \geq ax + bc$, vì $x \leq 2$ và $2a \geq 1$.)

Tuy nhiên, những lời giải như vậy không phải dễ dàng nghĩ ra. Về lời giải bằng dồn biến ở trên, một lần nữa chúng tôi nhấn mạnh đến tính tự nhiên của nó.

2) Bài toán 2 là một bài toán hay và thu được sự quan tâm của nhiều bạn. Tuy nhiên, các bạn sẽ bất ngờ khi nó chỉ là một hệ quả ...đơn giản của một BĐT quen thuộc khác. Đó chính là BĐT Iran 1996. Thật vậy, với giả thiết $ab+bc+ca = 1$ thì từ kết quả của BĐT Iran 1996 ta có ngay:

$$\begin{aligned}
&(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a})^2\\
&= \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} + \frac{4(a+b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{9}{4} + 4 = \frac{25}{4}
\end{aligned}$$

(lưu ý là $a+b+c=(a+b+c)(ab+bc+ca)\geq(a+b)(b+c)(c+a)$)

Từ nhận xét trên, ta nhớ lại là trong \$2, BĐT Iran 1996 đã được giải bằng kĩ thuật dồn về hai biến bằng nhau. Từ đó có hai câu hỏi rất tự nhiên là, thứ nhất: bài toán 2 ở trên có thể giải bằng cách dồn hai biến bằng nhau không, thứ hai: BĐT Iran 1996 có thể giải bằng cách dồn 1 biến ra biên không? Chúng tôi đề nghị các bạn tự giải đáp hai câu hỏi đó.

3) Bài toán 2 lại dẫn đến kết quả thú vị sau đây, mà tác giả là bạn Zhao bin (Trung Quốc)

"Cho x,y,z là các số thực không âm và chỉ có tối đa 1 số bằng 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{y^2+z^2}+\frac{1}{z^2+x^2}\geq\frac{10}{(x+y+z)^2}.\text{"}$$

Bằng hai bài toán "cũ" ở trên, chúng tôi muốn bạn đọc có một cảm giác dễ dàng đối với kĩ thuật dồn biến về biên. Tuy nhiên, trong hai bài này thì kĩ thuật dồn bai biến bằng nhau vẫn phát huy tác dụng, do đó không khỏi khó khăn trong việc thuyết phục bạn đọc về sức mạnh của kĩ thuật dồn biến ra biên. Do đó, chúng tôi dẫn ra bài toán sau đây, các bạn sẽ thấy kĩ thuật dồn về hai biến bằng nhau hoàn toàn bế tắc, đơn giản vì đẳng thức đạt được khi ... các biến đôi một khác nhau. Đây cũng là một trong những ví dụ quan trọng nhất của kĩ thuật dồn biến ra biên mà chúng tôi muốn trình bày với các bạn.

Bài toán 3: (Jackgarfukel) Cho a,b,c là 3 số thực không âm và có tối đa một số bằng 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+a}}\leq\frac{5}{4}\sqrt{a+b+c}\qquad(*)$$

Lời giải:

Trước khi tấn công bài này, ta cần xem khi nào trường hợp dấu bằng xảy ra: dễ thấy $a=b=c$ không thỏa, do đó một cách tự nhiên ta nghĩ đến trường hợp biên: $c=0$. Với $c=0$ thì BĐT(*) trở thành

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\sqrt{b}\leq\frac{5}{4}\sqrt{a+b}\qquad(1)$$

Chuẩn hóa $a+b=1$. Ta có

$$(1) \Leftrightarrow 1-b+\sqrt{b} \le \frac{5}{4} \Leftrightarrow (\sqrt{b}-1/2)^2 \ge 0 \quad \text{(đúng!)}$$

Vậy đẳng thức xảy ra khi $a=3b, c=0$ (và các hoán vị).

Như vậy trường hợp dấu bằng xảy ra khi cả ba biến rời nhau, do đó các phương pháp dồn về hai biến bằng nhau xem như không còn tác dụng. Do đó, dồn một biến về biên có thể xem là con đường tất yếu.

Không mất tổng quát có thể giả sử $a = max\{a,b,c\}$ và $a+b+c=1$. Đặt $t=\frac{a+c}{2}$ và $s=\frac{a-c}{2}$, suy ra $a=t+s, c=t-s, b=1-2t$. Ta có

$$(*) \Leftrightarrow \frac{t+s}{\sqrt{s+1-t}} + \frac{1-2t}{\sqrt{1-t-s}} + \frac{t-s}{\sqrt{2t}} \le \frac{5}{4} \qquad (1)$$

Đặt $f(s)=VT(1)$ với $s\in[0,t]$, ta sẽ chứng minh $f(s)\le \max(f(0),f(t))$. Ta có :

$$f'(s) = \frac{1}{\sqrt{s+1-t}} - \frac{t+s}{2(s+1-t)^{3/2}} + \frac{1-2t}{2(1-t-s)^{3/2}} - \frac{1}{\sqrt{2t}}$$

Vì chưa xác định được dấu của $f'(s)$ nên ta đạo hàm tiếp

$$f''(s) = -\frac{1}{(s+1-t)^{3/2}} + \frac{3(t+s)}{4(s+1-t)^{5/2}} + \frac{3(1-2t)}{4(1-t-s)^{5/2}}$$

$$f'''(s) = \frac{9}{4(s+1-t)^{5/2}} - \frac{15(t+s)}{8(s+1-t)^{7/2}} + \frac{15(1-2t)}{8(1-t-s)^{7/2}}$$

$$= \frac{18+3s-33t}{(1-t-s)^{7/2}} + \frac{15(1-2t)}{8(1-t-s)^{7/2}} > 0, \text{ vì } b=1-2t\ge 0$$

Vậy $f'''(s)>0$ với mọi $s\in[0,t]$ nên theo định lí Rolle ruy ra $f'(s)$ có tối đa đa hai nghiệm trên $[0,t]$. Mặt khác dễ dàng chứng minh $f'(0)\le 0$ và $f'(t)\ge 0$ do đó $f'(s)$ chỉ có thể đổi dấu tối đa một lần trên $(0,t)$, hơn nữa $f'(s)$ chỉ có thể có một trong các dạng sau: $f'(s)>0, \forall s\in(0,t)$ hoặc $f'(s)<0, \forall s\in(0,t)$ hoặc $f'(s)$ có dạng $-\ 0\ +$ trên $(0,t)$. Tuy nhiên trong trường hợp nào thì $f(s)$ cũng chỉ có thể đạt cực đại tại biên.

Vậy $f(s)\le \max(f(0),f(t))$ với mọi $s\in[0,t]$ nên ta chỉ cần chứng minh BĐT sau nữa là xong:

$$\max(f(0),f(t)) \le 5/4$$

Muốn vậy ta chứng minh lần lượt các BĐT $f(0) \leq 5/4$ và $f(t) \leq 5/4$. Việc chứng minh hai BĐT này đều rất dễ dàng, nên chúng tôi đề nghị bạn đọc tự kiểm chứng.

Hẳn nhiên các bạn đều đồng ý về sự cần thiết của phương pháp dồn biến ra biên đối với bài toán 3. Tuy nhiên, có thể nhiều bạn sẽ cho rằng: vì bài toán 3 không đối xứng nên mới không xảy ra trường hợp dấu "=" khi có hai biến bằng nhau. Để phủ định nhận xét đó, chúng tôi kết thúc mục này bằng cách dẫn ra một bài toán của anh Phạm Kim Hùng trên THTT:

Bài toán 4. Cho $a, b, c \geq 0$, $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$(a^3 + b^3 + c^3)(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3) \leq 36(ab + bc + ca)$$

Lời giải:

Không mất tổng quát có thể giả sử $a \geq b \geq c$. Đặt

$$f(a, b, c) = 36(ab + bc + ca) - (a^3 + b^3 + c^3)(a^3b^3 + b^3 + c^3 + c^3a^3)$$

Khi đó $f(a, b + c, 0) = 36a(b + c) - (a^3 + (b + c)^3)a^3(b + c)^3$.

Ta sẽ chứng minh rằng $f(a, b, c) \geq f(a, b + c, 0)$. Thật vậy, chú ý rằng:

$$36(ab + bc + ca) \geq 36a(b + c)$$

và

$$(a^3 + b^3 + c^3)(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3) \leq [a^3 + (b + c)^3]a^3(b + c)^3$$

(vì ta có $a^3 + b^3 + c^3 \leq a^3 + (b + c)^3$ và $a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 \leq a^3(b + c)^3$)

Do đó ta chỉ cần chứng minh bài toán trong trường hợp $c = 0$, hay

$$36ab \geq a^3b^3(a^3 + b^3) \Leftrightarrow 36 \geq a^2b^2(a^3 + b^3)$$

Đặt $t = ab$, bất đẳng thức có thể viết lại dưới dạng $t^2(27 - 9t) \leq 36 \Leftrightarrow t^3 + 4 \geq 3t^2$. Nhưng đây lại là BĐT Cauchy của ba số $t^3/2, t^3/2, 4$. Đẳng thức xảy ra khi $c = 0$ và $a + b = 3, ab = 2$ hay $a = 2, b = 1, c = 0$ (và các hoán vị).

***Nhận xét:** *Một ví dụ nữa, đơn giản hơn, của cùng tác giả trên Diễn Đàn Toán Học:*

" Cho $a, b, c \geq 0$, $a+b+c=2$. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2).\text{"}$$

Bài toán này không khó và đề nghị bạn đọc tự giải quyết.

5. BĐT 4 biến.

Sau khi nắm vững kĩ thuật dồn biến với 3 số thì các bạn có thể đọc mục này một cách nhanh chóng. Chúng tôi chỉ xin lưu ý đặc thù của trường hợp 4 biến: Khi có 4 biến thì ta có thể dồn biến theo từng cặp, và có thể chứng minh được ngay bài toán (chẳng hạn như BĐT Cauchy). Tuy nhiên, thuận lợi này thường chỉ xuất hiện trong các bài toán khá đơn giản. Đối với các bài phức tạp thì thường ta chỉ dồn được 1 cặp nhờ thứ tự sắp được giữa các biến. Sau khi dồn được hai biến bằng nhau (hoặc dồn được một biến ra biên) thì ta chưa có ngay BĐT với 1 biến, mà phải qua một BĐT trung gian (2 hay 3 biến). Tuy nhiên thường thì các BĐT trung gian này khá dễ để có thể chứng minh trực tiếp hoặc đánh giá để quy về 1 biến. Nói chung, chúng tôi nhấn mạnh điều cần thiết ở đây là các bạn cần quan sát thật kĩ mối liên hệ giữa 4 biến để có cách xử lý thích hợp.

Chúng ta bắt đầu với một ví dụ "kinh điển" cho kĩ thuật dồn biến với BĐT 4 biến.

Bài toán 1. (IMO SL, Việt Nam đề nghị) Cho $a, b, c, d \geq 0$, $a+b+c+d=1$. Chứng minh rằng:

$$abc+bcd+cda+dab \leq \frac{1}{27}+\frac{176}{27}abcd$$

Lời giải:

Bài này đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=d=1/4$ hoặc $a=b=c=1/3, c=0$. Do đó, những đánh giá thông thường rất dễ rơi vào bế tắc.

Đặt $f(a,b,c,d)=abc+bcd+cda+dab-kabcd$ với $k=\frac{176}{27}$. Ta có:

$$f(a,b,c,d)=ab(c+d-kcd)+cd(a+b)$$

Từ đó, ta hi vọng có $f(a,b,c,d) \le f(t,t,c,d)$ với $t = \frac{a+b}{2}$. Vì $0 \le ab \le t^2$ nên để có điều này ta cần $c + d - kcd \ge 0$. Ở đây rất may mắn là nếu có điều này có điều ngược lại, nghĩa là $c + d - kcd < 0$, thì BĐT ban đầu hiển nhiên đúng vì:

$$f(a,b,c,d) = ab(c+d-kcd)+cd(a+b) \le cd(a+b) \le (\frac{c+d+(a+b)}{3})^3 = \frac{1}{27}$$

Vậy ta có thể giả sử là luôn có $f(a,b,c,d) \le f(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c, d)$. Lưu ý là ta đã thực hiện được việc dồn biến như trên mà không cần bất cứ giả thiết phụ nào áp đặt lên 2 biến a, b. Do đó nhờ tính đối xứng ta có thể dồn 2 biến bất kì trong 4 biến về bằng nhau.

Từ đó, đặt thêm $s = \frac{c+d}{2}$ ta có:

$$\begin{aligned}&f(a,b,c,d) \le f(t,t,c,d) \le f(t,t,s,s) = f(t,s,t,s)\\ &\le f(\frac{t+s}{2}, \frac{t+s}{2}, t, s) \le f(\frac{t+s}{2}, \frac{t+s}{2}, \frac{t+s}{2}, \frac{t+s}{2}) = f(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = \frac{1}{27}\end{aligned}$$

và bài toán chứng minh xong!

***Nhận xét:**

1) Trong lời giải trên, thực chất là cứ mỗi bước ta lại phân ra 2 trường hợp: có một trường hợp thì dồn biến được và một trường hợp mà BĐT hiển nhiên đúng. Do đó, lời giải không khỏi có phần rối rắm. Bạn đọc nên trình bày lại bằng cách phản chứng (giả sử có (a_0, b_0, c_0, d_0) sao cho $f(a_0, b_0, c_0, d_0) > \frac{1}{27}$) sẽ gọn gàng và chặt chẽ hơn. Một cách khác là gộp cả hai trường hợp lại:

$$f(a,b,c,d) \le max\{\frac{1}{27}, f(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c, d)\} \qquad (1)$$

2) Ở đây còn có một cách nhìn nữa, thoạt nhìn thì không khác mấy ý ở trên (thậm chí có vẻ dài dòng hơn), tuy nhiên đây là một kĩ thuật rất có ích. Ý tưởng này lấy từ anh Phan Thành Nam và anh Phạm Kim Hùng trên Diễn Đàn Mathlinks.

Nhắc lại là $f(a,b,c,d) = ab(c+d-kcd) + cd(a+b)$. Đặt $g(x) = ab(c + d - kcd) + cd(a+b)$ thì g là hàm tuyến tính, và $ab \in [0, t^2]$ (với $t = \frac{a+b}{2}$) nên $g(ab) \le max\{g(0), g(t^2)\}$. Chú ý $g(0) = f(0, a+b, c, d)$. Vậy ta có:

$$f(a,b,c,d) \le max\{f(0, a+b, c, d), f(t,t,c,d)\} \qquad (2)$$

Với cách viết trong BĐT (2) ở trên thì việc cực trị đạt tại tâm hoặc tại biên là rất rõ ràng. Thật ra, trong bài toán này ta có ngay $f(0, a+b, c, d) \leq \frac{1}{27}$ và có thể chuyển (2) về (1). Tuy nhiên, với các bài phức tạp thì dạng (2) sẽ tỏ ra rất có ích, đặc biệt là trong kĩ thuật dồn biến tổng quát cho n số mà chúng tôi sẽ trình bày ở phần sau.

3) Các bạn hãy tự giải quyết bài toán tương tự sau đây của Nguyễn Anh Cường.

"Giả sử x, y, z, t là các số thực không âm thỏa mãn $x + y + z + t = 4$, chứng minh rằng:

$$3(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) + 4xyzt \geq 16 \quad ".$$

Chúng ta tiếp tục với 1 bài toán mà trong đó các kĩ thuật dồn 2 biến bằng nhau là thực sự rõ ràng.

Bài toán 2. (Phan Thành Nam) Cho a, b, c, d là các số thực không âm có tổng bằng 4. Chứng minh bằng:

$$abc + bcd + cda + dab + (abc)^2 + (bcd)^2 + (cda)^2 + (dab)^2 \leq 8$$

Lời giải:

Lời giải sau đây của tác giả bài toán. Đặt $f(a, b, c, d)$ là VT BĐT cần chứng minh. Ta có:

$$\begin{aligned}
&f(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c, d) - f(a, b, c, d) \\
&= (\frac{a-b}{2})^2(c+d) + (\frac{a-b}{2})^2[(\frac{a+b}{2})^2 + ab](c^2+d^2) - \frac{(a-b)^2}{2}c^2d^2 \\
&\geq (\frac{a-b}{2})^2(c + d + 4abcd - 2c^2d^2)
\end{aligned}$$

Vậy nếu $c + d + 4abcd \geq 2c^2d^2$ thì $f(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c, d) \geq f(a, b, c, d)$.

Ta giả sử $a \geq b \geq c \geq d$ thì theo trên ta có: $f(x, x, c, d) \geq f(a, b, c, d)$ với $x = \frac{a+b}{2}$. Tương tự, ta xét: $f(x, x, \frac{c+d}{2}, \frac{c+d}{2}) - f(x, x, c, d)$.

Nếu $2x + 4x^2cd \geq 2x^4$ thì $f(x, x, \frac{c+d}{2}, \frac{c+d}{2}) \geq f(x, x, c, d)$. Và ta chỉ cần chứng minh $f(x, x, y, y) \leq 8$ với $x + y = 2$. Điều này đơn giản.

Nếu $2x + 4x^2cd < 2x^4$ thì ta đánh giá tiếp: $2xcd + 2x^2c^2d^2 <= 2x^4$ nên:

$$f(x, x, c, d) = x^2(c+d) + 2xcd + 2x^2c^2d^2 + x^4(c^2+d^2) \geq x^2(c+d) + x^4(c+d)^2$$

và do $x^2(c+d) \leq (4/3)^3$ nên $f(x,x,c,d) <= (4/3)^3 + (4/3)^6 < 8$. Bài toán chứng minh xong!

***Nhận xét:**

1) Về điều kiện $c + d + 4abcd \geq 2c^2d^2$ để dồn hai biến a, b bằng nhau, ta thấy chỉ cần $ab \geq cd$ là đủ. Điều đó có nghĩa là nếu giả sử $a \geq b \geq c \geq d$ thì ta có thể dồn hai biến bất kì trong 3 biến a, b, c về bằng nhau (hơn nữa nếu 2 biến chưa bằng nhau thì BĐT ở đây là thực sự, nghĩa là sau khi dồn biến thì hàm f sẽ tăng lên một đại lượng > 0). Liệu điều đó có dẫn đến: $f(a,b,c,d) \leq f(t,t,t,c)$ với $t = \frac{a+b+c}{3}$ hay không?

Rõ ràng, nếu giả sử f đạt cực đại tại (a,b,c,d) thì theo đó ta phải có $a = b = c$. Trên Diễn Đàn Mathlinks bạn Zhao Bin đã có một lời giải với ý tưởng đó. Tuy nhiên, việc tồn tại cực đại của hàm f (với 4 biến) không phải là chuyện hiển nhiên (mặc dù nó rất rõ ràng về mặc trực giác).

Một ý nữa, là bằng cách dồn biến liên tiếp giữa 3 biến a, b, c ta có thể dùng dãy số để chuyển qua giới hạn và đưa về 3 biến bằng nhau. Nhưng một lần nữa, mặc dù rõ ràng về mặc trực giác nhưng cách làm trên không phù hợp với cách tiếp cận sơ cấp.

Tuy nhiên, trong bài toán 3 ngay bên dưới đây chúng tôi sẽ cung cấp cho các bạn một cách làm hết sức thú vị để chuyển về 3 biến bằng nhau trong những trường hợp như vậy.

2) Nói thêm về bài toán 2. Bài này không khó và theo lời tác giả bài toán thì nó được đặt ra để giải quyết bài toán sau đây của anh Phạm Kim Hùng: "Chứng minh rằng với 4 số không âm a, b, c, d có tổng bằng 4 thì:

$$\frac{1}{5-abc} + \frac{1}{5-bcd} + \frac{1}{5-cda} + \frac{1}{5-dab} \leq 1."$$

bằng cách sử dụng bổ đề sau đây:

"Cho 4 số $x_i \geq 0$ thỏa mãn: $\sum_{i=1}^{4}(x_i + x_i^2) \leq 8$ và $x_i + x_j \leq 3$,$\forall i \neq j$. Thì:

$$\frac{1}{5-x_1} + \frac{1}{5-x_2} + \frac{1}{5-x_3} + \frac{1}{5-x_4} \leq 1."$$

Bổ đề này rất thú vị nhưng nó không nằm trong phạm vi dồn biến của chúng ta. Tuy nhiên, có một câu hỏi là liệu có thể giải quyết bài toán của anh Phạm Kim Hùng bằng cách dồn biến hay không? Đó là một vấn đề hay mà chúng tôi muốn cách bạn tự mình suy nghĩ.

Trong bài toán sau, câu $a)$ là của anh Phạm Kim Hùng, còn câu $b)$ là một kết quả mạnh mà chúng tôi tìm được.

Bài toán 3. Cho $a, b, c, d \geq 0$, $a+b+c+d=4$. Đặt $F_k = (1+a^k)(1+b^k)(1+c^k)(1+d^k)$. Chứng minh rằng:
a) $F_4 \geq F_3$
b) $F_2 \geq F_1$.
Lời giải:
a) Ta sẽ chứng minh BĐT này bằng phản chứng. Giả sử ngược lại tức tồn tại bộ bốn số (a, b, c, d) thỏa mãn: $a, b, c, d \geq 0$, $a+b+c+d=4$ và $F_4 \leq F_3$ (1).

Theo BĐT Bunhacôpski ta có: $F_4.F_2 \geq F_3^2$, $F_3.F_1 \geq F_2^2$, $F_2.F_0 \geq F_1^2$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $F_4 < F_3 < F_2 < F_1 < F_0 = 16$ (3). Từ (3) ta có $F_4 < 16$ suy ra $max(a, b, c, d) < 2$.

Để dẫn tới mâu thuẫn với (3), ta sẽ chứng minh $F_3 \geq F_1$ (4). Thật vậy:

$$(4) \Leftrightarrow (1-a+a^2)(1-b+b^2)(1-c+c^2)(1-d+d^2) \geq 1$$
$$\Leftrightarrow (\frac{3}{4}+\frac{(2a-1)^2}{4})(\frac{3}{4}+\frac{(2b-1)^2}{4})(\frac{3}{4}+\frac{(2c-1)^2}{4})(\frac{3}{4}+\frac{(2d-1)^2}{4}) \geq 1$$
$$\Leftrightarrow (1+\frac{(2a-1)^2}{3})(1+\frac{(2b-1)^2}{3})(1+\frac{(2c-1)^2}{3})(1+\frac{(2d-1)^2}{3}) \geq \left(\frac{4}{3}\right)^4$$
$$\Leftrightarrow (1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)(1+t^2) \geq \left[1+\left(\frac{x+y+z+t}{4}\right)^2\right]^4 \qquad (5)$$

(Trong đó $x = \frac{2a-1}{\sqrt{3}}$, $y = \frac{2b-1}{\sqrt{3}}$, $z = \frac{2c-1}{\sqrt{3}}$, $t = \frac{2d-1}{\sqrt{3}}$)

Từ đó xét BĐT

$$(1+A^2)(1+B^2) \geq \left[1+\left(\frac{A+B}{2}\right)^2\right]^2 \qquad (6)$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{8}(A-B)^2(8-A^2-6AB-B^2) \geq 0$$

Ta thấy nếu $A+B \leq 2$ thì BĐT này đúng.

Không mất tổng quát có thể giả sử $a \leq b \leq c \leq d$. Kết hợp với $a+b+c+d=4$ ta dễ dàng chứng minh: $x+t < 2$ và $y+z < 2$. Do vậy theo

BĐT(6) ta có:

$$(1+x^2)(1+t^2) \geq \left[1+\left(\frac{x+t}{2}\right)^2\right]^2 \qquad (7)$$

$$(1+y^2)(1+z^2) \geq \left[1+\left(\frac{y+z}{2}\right)^2\right]^2 \qquad (8)$$

nhân (7) và (8) vế theo vế suy ra:

$$(1+x^2)(1+t^2)(1+y^2)(1+z^2) \geq \left[\left(1+(\frac{x+t}{2})^2\right)\left(1+(\frac{y+z}{2})^2\right)\right]^2 \qquad (9)$$

Từ $x+t<2$ và $y+z<2$ suy ra: $\frac{x+t}{2}+\frac{y+z}{2}<2$. Do đó lại áp dụng BĐT(6) ta được:

$$\left[1+(\frac{x+t}{2})^2\right]\left[1+(\frac{y+z}{2})^2\right] \geq \left[1+\left(\frac{x+y+z+t}{4}\right)^2\right]^2 \qquad (10)$$

Từ (9) và (10) suy ra:

$$(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)(1+t^2) \geq \left[1+\left(\frac{x+y+z+t}{4}\right)^2\right]^4$$

Vậy (5) đúng suy ra (4) đúng (mâu thuẫn với (3)). Điều đó có nghĩa việc giả sử ở (1) là sai tức ta có BĐT ngược lại là $F_4 \geq F_3$ (đpcm).

b) Câu này mạnh hơn câu a) do đó dùng "mánh lới" như câu a thì không ổn, tuy nhiên nếu " đường lớn tiến công" thì không gặp vấn đề gì:

Đặt $f(a,b,c,d) = VT - VP$ ta cần chứng minh $f(a,b,c,d) \geq 0$. Muốn vậy, trước hết ta chứng minh mệnh đề sau:

Mệnh đề: Nếu $a+b \leq 2$ và $a \geq x \geq b$ thì
$f(a,b,c,d) - f(x,a+b-x,c,d) \geq 0$
Thật vậy:
$f(a,b,c,d) - f(x,a+b-x,c,d)$
$= (a-x)(x-b)\left[(d+1)(c+1) - (d^2+1)(c^2+1)(ab-x^2+ax+bx-2)\right]$
từ đó sử dụng giả thiết dễ dàng suy ra điều chứng minh.

Trở lại bài toán ta có thể giả sử $a \le b \le c \le d$. Đặt $x = \frac{a+b+c}{3}$ thì: Chú ý $a + c \le 2$ và $c \ge x \ge a$ nên áp dụng mệnh đề ta có:

$$f(a,b,c,d) \ge f(a+c-x,b,x,d) \qquad (1)$$

Chú ý là $x = \frac{(a+c-x)+b+x}{3}$ nên nếu $x = min\{x,b,a+c-x\}$ hoặc $x = max\{x,b,a+c-x\}$ thì $a+c-x = b = x$ nên $f(a+c-x,b,x,d) = f(x,x,x,d)$ và bài toán chỉ còn 1 biến.

Giả sử ngược lại, khi đó có hai trường hợp:
$b < x < a + c - x$ (2) hoặc $a + c - x < x < b$ (3)
Lại sử dụng mệnh đề cho ta:
(2) :$f(a+c-x,b,x,d) \ge f(x,a+b+c-2x,x,d) = f(x,x,x,d)$ hoặc
(3) :$f(a+c-x,b,x,d) \ge f(a+b+c-2x,x,x,d) = f(x,x,x,d)$
Nói chung trong trường hợp nào ta cũng có

$$f(x,b,a+c-x,d) \ge f(x,x,x,d) \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $f(a,b,c,d) \ge f(x,x,x,d)$. Để giải quyết bài toán 1 biến, ta thay $x = \frac{x+y+z}{3} = \frac{4-d}{3}$ và chứng minh:

$$f(\frac{4-d}{3},\frac{4-d}{3},\frac{4-d}{3},d) \ge 0 \qquad (4)$$

Thật vậy:

$$(4) \Leftrightarrow \frac{1}{729}(d^6 - 22d^5 + 223d^4 - 1268d^3 + 4210d^2 - 7564d + 6364)(d-1)^2 \ge 0$$

Bất đẳng thức cuối đúng nên ta có điều phải chứng minh.

***Nhận xét:** *Việc đổi biến trước khi dồn biến của câu a) là khá kì lạ và đem lại hiệu quả không ngờ. Kĩ thuật dồn về 3 biến bằng nhau của câu b) là rất mạnh, và hoàn toàn sơ cấp (bởi số bước dồn biến chỉ là hữu hạn). Kĩ thuật này có thể ứng dụng cực tốt cho các bài 4 biến. Hơn thế, ở phần sau nó sẽ được mở rộng để giải quyết bài toán với n biến.*

Cuối cùng, chúng ta đến với một ví dụ cho trường hợp dồn biến ra biên. Đây cũng là một bài toán của anh Phạm Kim Hùng.

Bài toán 4. Cho $a,b,c,d \ge 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b^2+c^2+d^2} + \frac{b}{a^2+c^2+d^2} + \frac{c}{a^2+b^2+d^2} + \frac{d}{a^2+b^2+c^2} \ge \frac{4}{a+b+c+d}$$

Lời giải: Xét

$$f(a,b,c,d) = \sum_4 \frac{a}{b^2+c^2+d^2} - \frac{4}{a+b+c+d}$$

Giả sử $a \ge b \ge c \ge d$. Ta có:

$$\begin{aligned} & f(a,b,c,d) - f(a,b,\sqrt{a^2+b^2},0) \\ & = \frac{c}{a^2+b^2+d^2} + \frac{d}{a^2+b^2+c^2} - \frac{4}{a+b+c+d} \\ & \qquad\qquad - \left(\frac{\sqrt{c^2+d^2}}{a^2+b^2} - \frac{4}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}\right) \end{aligned}$$

(do $a^2+b^2 \ge c^2+d^2$ nên dễ thấy BĐT trên đúng)

Vậy vấn đề còn lại là chứng minh $f(a,b,\sqrt{c^2+d^2},0) \ge 0$. BĐT cuối chứng minh không khó nên xin nhường lại cho bạn đọc.

***Nhận xét:** *Cách dồn biến ở trên nhằm bảo toàn tổng $a^2+b^2+c^2+d^2$. Tất nhiên, việc này cũng không phải là điều quá quan trọng, bởi nếu thích các bạn cũng có thể bảo toàn $a+b+c+d$ bằng cách chứng minh $f(a,b,c,d) \ge f(\frac{a+b}{2}+\frac{a+b}{2},c,d)$, sau đó đánh giá*

$$f(t,t,c,d) \ge \frac{2t}{t^2+(c+d)^2} + \frac{c+d}{(\frac{c+d}{2})^2+2t^2} - \frac{4}{2t+c+d}$$

$$= \frac{x}{x^2/4+y^2} + \frac{y}{y^2/4+x^2/2} - \frac{4}{x+y} \qquad (\textit{trong đó } x=2t, y=c+d)$$

Bước cuối cùng là $f(x,y) \ge 0$ (chứng minh cái này không khó các bạn có thể giả sử $x+y=1$ cho gọn)

Đến đây chúng ta tạm kết thúc phần dồn biến cho BĐT "cụ thể" (có 3 hoặc 4 biến) để bước sang phần dồn biến cho BĐT n biến. Như chúng ta sẽ thấy, đây là một lĩnh vực khó hơn hẳn. Tuy nhiên các kĩ thuật chính đều đặt nền tảng thông qua việc khảo sát BĐT "cụ thể", mà đặc biệt là những tư tưởng manh nha khi khảo sát BĐT 4 biến.

6. Dồn biến bằng hàm lồi.

Các bạn thân mến, phương pháp dồn biến mà chúng ta đã tìm hiểu trong các mục trước không phải là từ trên trời rơi xuống. Thật ra ý tưởng dồn biến đã thể hiện rất rõ ngay trong các BĐT cổ điển. Do đó nếu xếp theo dòng chảy thời gian thì lẽ ra mục này phải được nêu ra ngay từ đầu. Tuy nhiên, chúng tôi nghĩ là sẽ thú vị hơn nếu chúng ta trở lại gốc rễ sau khi các bạn đã cảm nhận dồn biến như là một phương pháp "hiện đại".

Một trong những công cụ chính để dồn biến trong các BĐT "dạng cổ điển" là hàm lồi. Đây là một khái niệm quen thuộc, tuy nhiên để tiện lợi cho bạn đọc chúng tôi xin nhắc lại.

Định nghĩa: Một hàm số $f : [a, b] \to R$ được gọi là lồi nếu:

$$f(tx + (1 - ty)) \le tf(x) + (1 - t)f(y), \forall x, y \in [a, b], \forall t \in [0, 1]$$

***Nhận xét:**
1) Nếu f khả vi 2 lần thì một tiêu chuẩn rất quan trọng để kiểm tra tính lồi là $f''(x) \ge 0, \forall x \in (a, b)$.
2) Nếu f lồi thì f liên tục. Ngược lại, nếu f liên tục thì tính lồi của f là tương đương với điều có vẻ "yếu hơn" là: $f(\frac{x+y}{2}) \le \frac{f(x)+f(y)}{2}$.

Các bạn có thể thấy, định nghĩa hàm lồi đã đánh ngay vào mục tiêu dồn biến. Chúng ta có ngay kết quả quen thuộc sau:

Định lý: (BĐT Jensen) Cho f là hàm số lồi $[a, b] \to R$.
(i) Với x_i là n số thuộc $[a, b]$ ta có:

$$f(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}) \le \frac{f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)}{n}$$

(ii) Với x_i là n số thuộc A và λ_i là n số không âm có tổng bằng 1 ta có:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n) \le \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + ... + \lambda_1 f(x_n)$$

Những kết quả trên là quen thuộc và chúng tôi bỏ qua chứng minh. Thay vào đó chúng tôi dẫn ra đây một chứng minh cho BĐT Cauchy bằng cách dùng hàm lồi. Nhắc lại:

Bài toán 1. (BĐT Cauchy) Cho n số thực dương x_i. Chứng minh rằng:

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}$$

Lời giải:

Lấy logarit 2 vế, ta chuyển về dạng:

$$ln(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}) \geq \frac{ln(x_1) + ln(x_2) + ... + ln(x_n)}{n}$$

Hàm số $f(x) = ln(x)$ đi từ $R^+ \rightarrow R$ khả vi 2 lần và $f''(x) = -x^{-2} < 0, \forall x > 0$. Do vậy hàm $g(x) = -f(x)$ sẽ thỏa $g''(x) > 0, \forall x > 0$. Vậy g lồi. Từ đó, áp dụng BĐT Jensen ta có ngay điều phải chứng minh.

Nhận xét:** ***Một cách khác rất thông dụng dùng để chứng minh BĐT Cauchy, đó là chứng minh quy nạp theo n. Cách làm đó rất hay, đến nỗi ta có cảm giác là "cái gì đúng cho n = 2 thì cũng đúng cho n tùy ý". Các bạn hãy quan sát kĩ cách chứng minh đó, rồi chứng minh lại BĐT Jensen, các bạn sẽ thấy hàm lồi là một tổng quát nói lên bản chất của vấn đề.

Hàm lồi có thể ứng dụng trong rất nhiều BĐT cổ điển, và những BĐT cổ diển này lại giải quyết được rất nhiều bài toán khác. Tất nhiên, nó không phải là một công cụ "vạn năng", tuy nhiên nếu biết sử dụng khéo léo thì sức mạnh của nó không nhỏ. Chúng tôi dẫn ra đây một ví dụ cho thấy chúng ta không thể áp dụng hàm lồi để cho ngay kết quả, song nó giúp giải quyết được một trường hợp quan trọng mà các trường hợp còn lại có thể chứng minh đơn giản bằng cách này hay cách khác.

Bài toán 2. Cho các số thực x, y, z có tổng bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} \leq \frac{9}{10}$$

Lời giải:

Xét $f(t) = \frac{t}{1+t^2}$ thì BĐT cần chứng minh tương đương:

$$f(x) + f(y) + f(z) \leq 3f(\frac{x+y+z}{3})$$

Do đó, nếu $-f$ là hàm lồi thì coi như bài toán được giải quyết.

Ta có:

$$-f''(t) = \frac{2t(3-t^2)}{(1+t^2)^3}$$

nên $-f''(t) \geq 0, \forall t \in [0, \sqrt{3}]$. Vậy nếu $x, y, z \in [0, \sqrt{3}]$ thì bài toán được giải quyết.

Trong trường hợp còn lại thì chắc chắn ta sẽ có dấu BĐT thực sự. Do vậy cứ việc chia thành nhiều trường hợp con để xét.

Có thể giả sử $x \geq y \geq z$ lưu ý $x+y+z=1$ và $x, y, z \notin [0, 1]$ nên z phải âm suy ra $f(z) < 0$

*Nếu y âm suy ra x dương và $f(y) < 0$, ta có $f(x) + f(y) + f(z) < f(x) < 1/2 < 9/10$

*Nếu y dương suy ra x dương và lưu ý $f(y), f(x)$ nghịch biến trên $[\sqrt{3}, +\infty]$ do đó $f(x) + f(y) + f(z) < f(x) + f(y) < f(\sqrt{3}) + f(\sqrt{3}) < 9/10$

Bài toán chứng minh xong.

***Nhận xét:** *Tất nhiên lời giải trên chưa phải là ngắn gọn so với nhiều lời giải khác cho bài toán này mà chúng tôi được biết. Tuy nhiên tư tưởng của nó hoàn toàn trong sáng. Ở đây, nếu thay vì mong muốn dồn biến toàn cục (dồn 1 lần 3 biến) bằng việc hi vọng hợp lý hơn là dồn được 2 biến về bằng nhau thì lời giải sẽ ngắn hơn. Thật vậy, nếu có 2 trong 3 biến x, y, z thuộc đoạn $[0, \sqrt{3}]$ thì dùng hàm lồi ta dồn được 2 biến này về bằng nhau, và bài toán chỉ còn 1 biến, xem như giải quyết xong. Trong phần còn lại thì việc chia trường hợp sẽ đơn giản hơn. Như vậy, chúng ta có thêm một kĩ thuật để dồn 2 biến về bằng nhau là sử dụng hàm lồi.*

Mặc dù đây là một công cụ tốt, nhưng một điểm yếu rất dễ nhận ra là trong BĐT, các biến phải nằm trong các biểu thức độc lập nhau (để có thể viết thành dạng $f(x_1) + ... + f(x_n)$). Trong khi đó, những BĐT mà ta đã gặp phần lớn không có điều đó, và ta sẽ phải làm việc với dạng tổng quát hơn là $f(x_1, ..., x_n)$. Chúng ta sẽ phải thiết lập các kết quả về dồn biến cho dạng tổng quát này ở mục sau.

Như đã nói ở trên, với hàm lồi thì ý tưởng dồn các biến về bằng nhau thể hiện ngay từ định nghĩa. Tuy nhiên, điều bất ngờ là kĩ thuật dồn biến ra biên cũng có thể thực hiện thông qua hàm lồi. Các bạn có thể thấy ngay điều đó qua kết quả sau đây:

Định lý: Cho $f : [a, b] \to R$ là một hàm lồi. Khi đó:

$$f(x) \leq max\{f(a), f(b)\}, \forall x \in [a, b]$$

Chứng minh:

Vì f liên tục nên f đạt giá trị lớn nhất tại $x_0 \in [a, b]$. Xét khi $|x_0 - a| \leq |x_0 - b|$ (nghĩa là x_0 gần a hơn b). Thì $x_1 = 2x_0 - a \in [a, b]$. Khi đó theo định nghĩa hàm lồi ta có:

$$f(a) + f(x_1) \geq 2f(\frac{a + x_1}{2}) = 2f(x_0)$$

suy ra $f(a) = f(x_0)$. Với x_0 gần b hơn a thì chứng minh tương tự.

Nhận xét: Để các bạn có thể cảm nhận "cái đúng" của định lý trên chúng tôi sẽ nêu ra một hình ảnh khi $f''(x) > 0, \forall x \in (a, b)$. Khi đó, f' đồng biến nên chỉ có tối đa 1 nghiệm trên (a, b), nói cách khác là chỉ đổi dấu tối đa 1 lần. Do đó f sẽ rơi vào các trường hợp sau đây: đồng biến, nghịch biến, "đi lên rồi đi xuống", hoặc "đi xuống rồi đi lên". Và trong trường hợp nào ta cũng thu được kết quả cần thiết. (Một chứng minh khác trong trường hợp này là giả sử f đạt cực đại tại $x_0 \in (a, b)$ thì $f''(x_0) \leq 0$, mâu thuẫn.)*

Chúng tôi sẽ dẫn ra đây 2 bài toán mà chúng thực sự là các bài toán khó cho dù giải bằng biến đổi đại số hay quy nạp.

Bài toán 3. Cho $0 < p < q$, và n số thực $x_i \in [p, q]$. Chứng minh rằng:

$$(x_1 + x_2 + ... + x_n)(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}) \leq n^2 + \left[\frac{n^2}{4}\right] \frac{(p - q)^2}{pq}$$

trong đó kí hiệu $[x]$ là chỉ phần nguyên của x

*(*Ghi chú: Đây là một bài tổng quát, trong đó trường hợp $n = 5$ là bài USAMO 77, còn $n = 3$ là đề thi Olympic $30 - 4$ năm 2001)*

Lời giải:

Từ giả thiết $x_i \in [p, q]$, ta dễ dàng đoán rằng: GTLN sẽ đạt được khi $x_i \in [p.q]$ với mọi i. Khi đó, g/s trong n số x_i có k số p và $n - k$ số q thì:

$$VT = (kp + (n - k)q)(\frac{k}{q} + \frac{n - k}{q}) = k^2 + (n - k)^2 + k(n - k)(\frac{p}{q} + \frac{q}{p})$$

$$= n^2 + k(n-k)\frac{(p-q)^2}{pq} = n^2 + \frac{1}{4}\left[n^2 - (n-2k)^2\right]\frac{(p-q)^2}{pq}$$

Vì k nguyên nên $n^2-(n-2k)^2 \leq n^2$ (khi n chẵn) và $n^2-(n-2k)^2 \leq n^2-1$ (khi n lẻ). Từ đó, ta thu được BĐT ban đầu đồng thời chỉ ra luôn trường hợp dấu bằng xảy ra.

Đến đây, ta chợt nhận ra: mấu chốt của vấn đề chỉ là nhận xét: "GTLN sẽ đạt được khi $x_i = p$ hoặc $x_i = q$ với mọi i". Và thật bất ngờ, nhận xét này chứng minh rất dễ.

Với mọi i, ta xem vế trái là một hàm theo x_i, ta sẽ chứng tỏ: $f(x_i) \leq max\{f(p), f(q)\}$, và dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x_i \in \{p, q\}$.

Ta có: $f(x) = Ax + \frac{B}{x} + C$. Có thể khảo sát hàm để ra ngay kết quả (suy ra luôn dấu bằng xảy ra khi $x_i \in \{p, q\}$). Song ở đây trình bày một cách sơ cấp hơn. Để ý:

$$f(x_i) - f(p) = (x_i - p)(A - \frac{B}{x_i p})$$

$$f(x_i) - f(q) = (x_i - q)(A - \frac{B}{x_i q})$$

Từ đó nếu $f(x_i) > max\{f(p), f(q)\}$ thì rõ ràng $x_i \notin \{p, q\}$ và:

$$A - \frac{B}{x_i p} > 0, A - \frac{B}{x_i q} \Rightarrow \frac{B}{x_i p} < A < \frac{B}{x_i q}$$

mâu thuẫn $p < q$. Vậy $f(x_i) \leq max\{f(p), f(q)\}$.

Cần nói thêm về trường hợp dấu bằng: g/s $f(x_i) = max\{f(p), f(q)\}$ mà $x_i \notin \{p, q\}$. Nếu $f(x_i) = f(p)$ thì $A = \frac{B}{x_i p} > \frac{B}{x_i p}$, khi đó $f(x_i) - f(p) < 0$ (mâu thuẫn). Tương tự, nếu $f(x_i) = f(q)$ cũng mâu thuẫn. Vậy $f(x_i) = max\{f(p), f(q)\}$ tương đương với $x_i \in \{p, q\}$

Nhận xét: Ta có bài toán mở rộng sau:

"Cho** $a_i \in [a, A], b_i \in [b, B]$ **với** $0 < a \leq A$ **và** $0 < b \leq B$. **Tìm giá trị lớn nhất của

$$T = \frac{(a_1^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + ... + b_n^2)}{a_1 b_1 + ... + a_n b_n}."$$

Nhà toán học Polya đã cho một chặn trên là: $\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{AB}{ab}} + \sqrt{\frac{ab}{AB}}\right)^2$

Bài toán trên mang ý nghĩa là tìm chặn trên của BĐT Bunhacôpski,

một điều rất tự nhiên được đặt ra là chặn trên của BĐT Côsi là gì ? Nếu bạn tò mò thì hãy xem tiếp bài toán sau đây:

Bài toán 4. (Phan Thành Nam) Cho $0 < a < b$, và n số thực $x_i \in [p, q]$. Chứng minh rằng:

$$T = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + ... + \frac{x_n}{x_1} \leq n + \left[\frac{n}{2}\right] \frac{(p-q)^2}{pq}$$

Lời giải:

Với mọi i, thay x_i bởi p hay q thì ít nhất một trường hợp T phải tăng lên, và nếu T không tăng thì buột $x_i \in \{p, q\}$.

Cho i chạy từ 1 tới n, với mỗi i ta thay x_i bởi p hay q sao cho T tăng lên (hoặc giữ nguyên nếu hai trường hợp đều không tăng)

Sau bước biến đổi trên ta đã có $x_i \in [p, q]$ với mọi i. Nếu $x_i = q$ với mọi i thì $T = n$, không phải GTLN, do đó chỉ cần xét khi $\exists x_i = p$.Do hoán vị vòng quanh nên có thể giả sử $x_1 = p$. Khi đó bất kể $x_3 = p$ hay q ta thay x_2 bởi q thì T vẫn không giảm. Sau khi thay x_2 bởi q ta lại thay x_3 bởi p thì T vẫn không giảm ... Cứ như vậy ta xen kẽ p, q cho tới số x_n thì T vẫn không giảm. Sau khi thực hiện quá trình như trên lúc này ta có

$$T = \frac{n}{2}(\frac{p}{q} + \frac{q}{p}) \text{ (nếu n chẵn) và } T = \frac{n-1}{2}(\frac{p}{q} + \frac{q}{p}) + 1 \text{ (nếu n lẻ)}$$

Ta viết lại 2 trường hợp dưới dạng:

$$T = n + \left[\frac{n}{2}\right] \frac{(p-q)^2}{pq} \qquad , \forall n$$

và đây chính là vế phải BĐT cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $x_i \in \{p, q\}$ và xen kẽ kể từ x_1 tới x_n (không kể vòng x_n, x_1). Bài toán đến đây được giải quyết trọn vẹn !

Như vậy, chúng ta có thể thấy ý tưởng dồn biến đã xuất hiện rất sớm ngay trong cách tiếp cận cổ điển. Chúng ta đã gặp lại 2 kĩ thuật dồn biến quan trọng ở các mục trước là: dồn biến về tâm và dồn biến ra biên. Đặc

biệt trong trường hợp cực trị đạt được tại tâm, hàm lồi còn cho ta một kiểu dồn biến nữa rất thú vị mà chúng ta sẽ tìm hiểu ở mục sau. Mặc dù với một loạt các bài BĐT xuất hiện gần đây thì có vẻ như công cụ cổ điển là không đủ (hoặc rất khó khăn), nhưng một lần nữa, chúng tôi nhấn mạnh tầm quan trọng của những ý tưởng "cổ điển", mà dựa vào đó chúng ta mới có thể "đứng trên vai những người khổng lồ".

7. Dồn biến về giá trị trung bình.

Cho đến bây giờ, trong phương pháp dồn biến của chúng ta, số lần thực hiện thao tác dồn biến luôn là hữu hạn, nhờ đó lời giải là rõ ràng và hoàn toàn sơ cấp. Đây là một điều rất tốt mà chúng tôi muốn duy trì tiếp tục trong mục này.

Trước hết, chúng tôi giới thiệu thêm một cách dồn biến nữa dành cho hàm lồi. Ta sẽ gọi đây là kĩ thuật dồn biến về giá trị trung bình, mà các bạn sẽ thấy rõ điều đó qua kết quả sau:

Định lý: Cho f là hàm lồi $[a,b] \to R$. Ta có:

$$f(a)+f(b) \geq f(x)+f(a+b-x), \forall x \in [a,b]$$

Chứng minh:

Vì $x \in [a,b]$ nên: $x = ta+(1-t)b$ với $t \in [0,1]$. Khi đó: $a+b-x = (1-t)a+tb$. Áp dụng định nghĩa hàm lồi, ta có:

$$f(x)+f(a+b-x) = f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)$$
$$\leq [tf(a)+(1-t)f(b)]+[(1-t)f(a)+tf(b)] = f(a)+f(b)$$

Ứng dụng kết quả này, ta có ngay chứng minh cho BĐT Jensen. Nhắc lại:

Định lý: (BĐT Jensen) Cho f là hàm số lồi $[a,b] \to R$. Thì với $x_i \in [a,b]$ là n số có trung bình cộng bằng T, ta có:

$$f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n) \geq nf(T)$$

Chứng minh:

Ta cho thực hiện thuật toán sau:

***Bước 1:** Nếu $x_i = T, \forall i$ thì dừng lại. Nếu không thì qua bước 2.

***Bước 2:** Vì không có $x_i = T, \forall i$ nên phải có 1 biến lớn hơn hơn T và 1 biến nhỏ hơn T, mà ta có thể giả sử là $x_1 > T > x_2$. Khi đó thay bộ $(x_1, x_2, ..., x_n)$ bởi bộ $(T, x_1 + x_2 - T, ..., x_n)$. Sau đó trở lại bước 1.

Như vậy mỗi lần thực hiện bước 2 thì bộ mới cũng có trung bình cộng là T, tuy nhiên nó làm cho biểu thức f tăng lên. Mặt khác mỗi lần thực hiện bước 2 thì số biến bằng T tăng lên ít nhất là 1, do đó sau hữu hạn (có thể lấy là $n-1$) lần thực hiện bước 2, ta sẽ phải dừng lại ở bước 1. Chú ý là trong quá trình thay thế thì biểu thức f tăng lên, do vậy ta có điều phải chứng minh.

Vậy là chúng ta có thêm một cách dồn biến mới. Sỡ dĩ chúng tôi không dưa cách dồn biến này ra ở các mục trước, là vì nó chỉ có giá trị khi dồn biến về tâm, mà khi đó với $n = 3$ thì kĩ thuật dồn 2 biến về bằng nhau đã đủ sử dụng. Tuy nhiên, kĩ thuật này sẽ phát huy tác dụng khi số biến tăng lên, cụ thể là với trường hợp n biến tổng quát. Lý do khá đơn giản: trong BĐT với n biến, cho dù ta dồn được 2 biến về bằng nhau thì cũng chưa thu được gì đáng kể, và trong trường hợp đó thì sau hữu hạn lần dồn biến vẫn không thể đưa được về trường hợp 1 biến (chứ chưa nói là đưa được về trường hợp các biến bằng nhau). Tuy nhiên, nếu sử dụng kĩ thuật dồn biến ra biên hoặc dồn biến về giá trị trung bình thì tình hình lại khác: sau mỗi lần dồn biến thì số lượng biến có giá trị cố định tăng lên (là giá trị tại biên hoặc giá trị trung bình), do đó chỉ cần hữu hạn lần dồn biến ta sẽ đưa được tất cả các biến về các giá trị cố định và bài toán xem như giải quyết xong.

Tất nhiên, khả năng để có thể dồn 1 biến bất kì về biên hoặc giá trị trung bình là không cao. Tuy nhiên, cái quan trọng là tinh thần của nó: dồn 1 biến về giá trị cố định. Bạn đọc có thể thấy ý tưởng này cực kì hiệu quả trong trường hợp 4 biến (xem câu c), Bài toán 3, \$5). Trong mục này, chúng tôi tiếp tục giới thiệu 2 bài toán khác, mà trong đó ý tưởng dồn biến về giá trị trung bình đã cho lời giải bất ngờ. Đây là 2 bài toán đặc sắc của anh Phạm Kim Hùng, mà việc giải quyết chúng đã đem lại cho chúng tôi nhiều ý tưởng mới cho phương pháp dồn biến.

Bài toán 1. Cho n số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$ có tích bằng 1 . Chứng minh rằng với $k = 4(n-1)$ ta luôn có:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} + \frac{k}{a_1 + a_1 + ... + a_n} \geq n + \frac{k}{n} \qquad (1)$$

Lời giải:

Với $n = 1, n = 2$ thì bài toán đơn giản, nên dưới đây ta xét khi $n \geq 3$. Trước hết, ta khảo sát các trường hợp có thể dồn biến và rút ra:

Mệnh đề 1: Kí hiệu $f(a_1, a_2, ..., a_n)$ là biểu thức vế trái BĐT cần chứng minh.
(i) Nếu $a_1 \leq x \leq a_2$ và $a_1a_2 \leq 1$ thì

$$f(a_1, a_2, ..., a_n) \geq f(x, \frac{a_1a_2}{x}, a_3, ..., a_n)$$

(ii) Nếu $(1-a_1)(1-a_2)[ka_1a_2 - (\sum_{i=1}^n a_i)(\sum_{i=3}^n a_i + a_1a_2 + 1)] \geq 0$ thì

$$f(a_1, a_2, ..., a_n) \geq f(1, a_1a_2, a_3, ..., a_n)$$

(iii) Nếu $a_1, a_2 \geq 1 \geq a_3$ thì:

$$f(a_1, a_2, ..., a_n) \geq min\{f(1, a_1a_2, a_3, ..., a_n), f(1, a_2, a_1a_3, a_1a_i, ..., a_n)\}$$

Chứng minh mệnh đề 1:
Để viết cho gọn ta đặt $A = \sum_{i=3}^n a_i$.
(i) Ta có:

$$\begin{aligned}
&f(a_1, a_2, ..., a_n) - f(x, \frac{a_1a_2}{x}, a_3, ..., a_n)\\
&= \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{x} - \frac{x}{a_1a_2} + \frac{k}{A + a_1 + a_2} - \frac{k}{A + x + \frac{a_1a_2}{x}}\\
&= \frac{(x-a_1)(a_2-x)[(A+a_1+a_2)(A+x+\frac{a_1a_2}{x}) - ka_1a_2]}{a_1a_2(A+a_1+a_2)(A+x+\frac{a_1a_2}{x})}
\end{aligned}$$

Theo BĐT Cauchy:

$$(A + a_1 + a_2)(A + x + \frac{a_1a_2}{x})) \geq n^2 \geq 4(n-1) = k \geq ka_1a_2$$

và ta có đpcm.
(ii) Cũng từ đẳng thức ở trên cho $x = 1$ ta có:

$$\begin{aligned}
&f(a_1, a_2, ..., a_n) - f(1, a_1a_2, a_3, ..., a_n)\\
&= \frac{(1-a_1)(1-a_2)[ka_1a_2 - (A+a_1+a_2)(A+a_1a_2+1)]}{a_1a_2(A+a_1+a_2)(A+a_1a_2+1}
\end{aligned}$$

và ta có đpcm.
(iii) Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $ka_1a_2 \geq (\sum_{i=1}^n a_i)((\sum_{i=3}^n a_i + a_1a_2 + 1)])$ thì dùng (ii) ta có $f(a_1, a_2, ..., a_n) \geq f(1, a_1a_2, a_3, ..., a_n)$.
Trường hợp 2: Nếu $ka_1a_2 \leq (\sum_{i=1}^n a_i)((\sum_{i=3}^n a_i + a_1a_2 + 1)])$ thì vì $a_3 \leq 1 \leq a_2$ nên:

$$ka_1a_3 \leq (\sum_{i=1}^n a_i)(\sum_{i\neq 1,3} a_i + a_1a_3 + 1)$$

(thật vậy:

$$\frac{\sum_{i\neq 1,3} a_i + a_1a_3 + 1}{a_1a_3} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i - a_1 - a_3 + 1}{a_1a_3} + 1$$
$$\geq \frac{\sum_{i=1}^n a_i - a_1 - a_2 + 1}{a_1a_2} + 1 = \frac{\sum_{i=3}^n a_i + a_1a_2 + 1}{a_1a_2})$$

Do đó, dùng (ii) ta có: $f(a_1, a_2, ..., a_i, ..., a_n) \geq f(1, a_2, ..., a_1a_i, ..., a_n)$.
Mệnh đề 1 chứng minh xong! Nó sẽ cho phép ta đưa bài toán về 1 biến.

Mệnh đề 2: Ta sẽ luôn đưa được bài toán về trường hợp có $n-1$ biến bằng nhau và ≤ 1.
Chứng minh mệnh đề 2:
***Bước 1:** Đưa về trường hợp có $n-1$ biến ≤ 1.

Giả sử còn có nhiều hơn 1 biến lớn hơn 1, mà ta có thể giả sử là a_1, a_2. Thì sử dụng mệnh đề 1 (iii) ta luôn có thể thay bộ $(a_1, ..., a_n)$ bởi 1 bộ khác, vẫn có tích bằng 1, làm cho f không tăng, và hơn nữa có số biến bằng 1 tăng lên ít nhất là 1. Do đó sau hữu hạn lần thay (không quá $n-1$) ta sẽ có được $n-1$ biến ≤ 1.
***Bước 2:** Đưa $n-1$ biến ≤ 1 về bằng nhau.

Giả sử $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_{n-1} \leq 1$ là $n-1$ biến có trung bình nhân là x. Nếu $n-1$ biến này chưa bằng nhau thì $a_1 < x < a_{n-1}$ và dùng mệnh đề 1 (i) ta có thể thay bộ $(a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n)$ bởi $(x, a_2, ..., \frac{a_1a_{n-1}}{x}, a_n)$. Khi đó f khôn giảm và số biến bằng x tăng lên ít nhất là 1. Ta cũng lưu ý là $\frac{a_1a_{n-1}}{x} \leq \frac{a_1}{x} \leq 1$ (vì a_1 là số nhỏ nhất trong $n-1$ số $a_1, ..., a_{n-1}$ nên $a_1 \leq x$), do đó việc thay thế này vẫn đảm bảo $n-1$ biến đều ≤ 1, điều đó cho phép việc thay thế có thể thực hiện liên tiếp. Vậy sau hữu hạn (không quá $n-1$) lần thay thế ta sẽ có $n-1$ biến ≤ 1 đều bằng nhau.

Cuối cùng, ta giải quyết bài toán 1 biến, tức là chứng minh:

$$f(x, x, ..., x, \frac{1}{x^{n-1}}) \geq f(1, 1, ..., 1) \quad \text{với } x \leq 1$$

Đặt:

$$g(x) := f(x, x, ..., x, \frac{1}{x^{n-1}}) = \frac{n-1}{x} + x^{n-1} + \frac{k}{(n-1)x + \frac{1}{x^{n-1}}}$$

với $x \in (0, 1]$.
Ta có:

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{n-1}{x^2} + (n-1)x^{n-2} - \frac{k[n-1-\frac{n-1}{x^n}]}{((n-1)x + \frac{1}{x^{n-1}})^2} \\ &= (n-1)\frac{x^n-1}{x^2}\left(\frac{(n-1)x^n-1}{(n-1)x^n+1}\right)^2 \qquad \text{lưu ý là } k = 4(n-1) \end{aligned}$$

Ta thấy ngay $g(x) \leq 0$ với $x \in (0, 1]$, nên $g(x) \geq g(1)$ và ta có đpcm.
Bài toán chứng minh xong!

***Ghi chú:** *Bài toán ban đầu của anh Phạm Kim Hùng là với $k = 3n, n \geq 4$. Kết quả ở đây mạnh hơn, và như các bạn thấy trong chứng minh cho trường hợp 1 biến thì só $k = 4(n-1)$ "hợp lý" hơn.*

Bài toán 2. Cho n số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$ có tích bằng 1. Chứng minh rằng:

$$(1 + a_1^2)(1 + a_2^2)...(1 + a_n^2) \leq \frac{2^n}{n^{2n-2}}(a_1 + a_2 + ... + a_n)^{2n-2}$$

Lời giải:

Với $n = 1, n = 2$ thì đơn giản nên ta chứng minh cho $n \geq 3$. Ta thấy bài toán tương đương với $f(a_1, a_2, ..., a_n) \geq 0$ và cũng tương đương với $g(a_1, a_2, ..., a_n) \geq 0$, trong đó:

$$\begin{aligned} f(a_1, a_2, ..., a_n) &= k(a_1 + a_2 + ... + a_n)^{2n-2} - (1 + a_1^2)(1 + a_2^2)...(1 + a_n^2) \\ g(a_1, a_2, ..., a_n) &= \ln(k) + (2n-2)\ln(a_1 + a_2 + ... + a_n) + \\ &\quad - \ln(1 + a_1^2) - \ln(1 + a_2^2) - ... - \ln(1 + a_n^2) \end{aligned}$$

(về việc tại sao phải xét cả f và g sẽ bình luận ở sau)

Khảo sát sơ bộ các trường hợp có thể dồn biến, ta có:

•Mệnh đề 1:

(i) Nếu $a_1 \geq 1 \geq a_2, a_3$ thì:

$$f(a_1, a_2, ..., a_n) \geq min\{f(1, a_1a_2, a_3, ..., a_n), f(a_1, 1, a_2a_3, ..., a_n)\}$$

(ii) Nếu $a_1 = max\{a_i\}_{i=1}^n$ và $a_1 \geq x \geq a_2 \geq 1$ thì:

$$g(a_1, a_2, ..., a_n) \geq g(x, \frac{a_1a_2}{x}, a_3, ..., a_n)$$

Chứng minh mệnh đề 1:
(i) Xét các hiệu

$$\begin{aligned}
&f(a_1, a_2, ..., a_n) - f(1, a_1a_2, a_3, ..., a_n)\\
&= ks^{2n-2} - ku^{2n-2} + [2(1 + a_1^2a_2^2) - (1 + a_1^2)(1 + a_2^2)](1 + a_3^2)...(1 + a_n^2)\\
&\qquad\qquad (\text{với } s = a_1 + a_2 + ... + a_n, u = 1 + a_1a_2 + ... + a_n)\\
&= k(a_1 + a_2 - 1 - a_1a_2)(s^{2n-3} + s^{2n-4}u + ... + u^{2n-3})+\\
&\quad +(1 - a_1^2)(1 - a_2^2)(1 + a_3^2)...(1 + a_n^2)\\
&= -(1 - a_1)(1 - a_2)[k(s^{2n-3} + ... + u^{2n-3})+\\
&\qquad\qquad -(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3^2)...(1 + a_n^2)]
\end{aligned}$$

Sử dụng lại đẳng thức ở trên với a_3 đổi chỗ cho a_1, ta có:

$$\begin{aligned}
&f(a_1, a_2, ..., a_n) - f(a_1, 1, a_2a_3, ..., a_n)\\
&= -(1 - a_2)(1 - a_3)[k(s^{2n-3} + ... + v^{2n-3})+\\
&\qquad\qquad -(1 + a_2)(1 + a_3)(1 + a_1^2)(1 + a_4^2)...(1 + a_n^2)]\\
&\qquad\qquad\qquad (\text{với } v = 1 + a_2a_3 + a_1 + a_4 + ... + a_n)
\end{aligned}$$

Từ 2 đẳng thức ở trên, ta thấy:
$*$ nếu $k(s^{2n-3} + ... + u^{2n-3}) - (1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3^2)...(1 + a_n^2) \geq 0$ (2)
Thì $f(a_1, a_2, ..., a_n) \geq f(1, a_1a_2, a_3, ..., a_n)$
$*$ nếu $k(s^{2n-3}+...+v^{2n-3})-(1+a_2)(1+a_3)(1+a_1^2)(1+a_4^2)...(1+a_n^2) \leq 0$ (3)
Thì $f(a_1, a_2, ..., a_n) \geq f(1, a_1a_2, a_3, ..., a_n)$
Do đó, ta chỉ cần chứng minh trong 2 BĐT (2) và (3) có ít nhất một cái đúng là xong! Chẳng hạn, ta giả sử (2) sai, và sẽ chứng minh (3) đúng. Muốn vậy, ta chỉ cần chứng minh: $u \geq v$ và $(1+a_1)(1+a_3^2) \leq (1+a_3)(1+a_1^2)$ là xong! Điều này có được từ việc tính toán đơn giản:

$$u - v = a_3 + a_1a_2 - a_1 - a_2a_3 = (1 - a_2)(a_1 - a_3) \geq 0$$
$$(1 + a_1)(1 + a_3^2) - (1 + a_3)(1 + a_1^2) = (a_3 - a_1)(a_1a_3 + a_1 + a_3 - 1) \leq 0$$

Vậy mệnh đề (i) chứng minh xong!
(ii) Với việc xuất hiện hàm ln ta không thể xét hiệu rồi biến đổi, mà thay

vào đó ta dùng đạo hàm.
Xét:

$$g(t) = \ln(k) + 2(n-1)\ln(ta_1 + \frac{a_2}{t} + a_3 + ... + a_n) +$$
$$- \ln(1 + t^2a_1^2) - \ln(1 + \frac{a_2^2}{t^2}) - \ln(1 + a_3^2) - ... - \ln(1 + a_n^2)$$

với $t \in [\sqrt{a_2/a_1}, 1]$.
Ta có:

$$g'(t) = \frac{2(n-1)(a_1 - \frac{a_2}{t^2})}{ta_1 + \frac{a_2}{t} + a_3 + ... + a_n} - \frac{2ta_1^2 - \frac{2a_2^2}{t^3}}{(1 + t^2a_1^2)(1 + \frac{a_2^2}{t^2})}$$
$$= 2(a_1 - \frac{a_2}{t^2})[\frac{(n-1)}{ta_1 + \frac{a_2}{t} + a_3 + ... + a_n} - \frac{ta_1 + \frac{a_2}{t}}{(1 + t^2a_1^2)(1 + \frac{a_2^2}{t^2})}]$$

Vì $t \in [\sqrt{a_2/a_1}, 1]$ nên $a_1 - \frac{a_2}{t} \geq 0$. Do đó, gọi T là thừa số còn lại, ta chỉ cần chứng minh $T \geq 0$ là có thể suy ra g đồng biến (trên $[\sqrt{a_2/a_1}, 1]$).

Để viết cho gọn, ta đặt

$$c = \sqrt{(1 + t^2a_1^2)(1 + \frac{a_2^2}{t^2})}, d = ta_1 + \frac{a_2}{t}$$

Ta có:

$$T \geq 0 \Leftrightarrow \frac{n-1}{d + a_3 + ... + a_n} \geq \frac{d}{c^2} \Leftrightarrow (n-1)c^2 \geq d^2 + d(a_3 + ... + a_n)$$

Vì $c \geq d$ (BĐT Bunhiacopski) nên để có BĐT trên ta chỉ cần:

$$(n-2)c \geq a_3 + ... + a_n$$

Điều này đúng vì $c > a_1a_2 \geq a_1 \geq max\{a_3, ..., a_n\}$.

Lấy $t_0 = max\{x, \frac{a_1a_2}{x}\}/a_1$, thì

$$t_0 \in [\sqrt{\frac{a_2}{a_1}}, 1], t_0a_1 = max\{x, \frac{a_1a_2}{x}\}, \frac{a_2}{t_0} = min\{x, \frac{a_1a_2}{x}\}$$

Vì g đồng biến trên $[\sqrt{a_2/a_1}, 1]$ nên $g(1) \geq g(t_0)$ và ta có đpcm.

Vậy mệnh đề (ii) chứng minh xong! Mệnh đề 1 chứng minh xong!

Trở lại bài toán, ta sẽ nói là bộ $(a_1, a_2, ..., a_n)$ được thay thế bởi bộ $(b_1, b_2, ..., b_n))$ nếu $f(a_1, a_2, ..., a_n) \geq f(b_1, b_2, ..., b_n)$ **hoặc** $g(a_1, a_2, ..., a_n) \geq g(b_1, b_2, ..., b_n)$.

Mệnh đề 2: Luôn đưa được về trường hợp có $n-1$ biến bằng nhau ≥ 1.
Chứng minh mệnh đề 2:
***Bước 1:** Đưa về trường hợp có $n-1$ biến ≥ 1.

Giả sử còn có 2 biến $a_2, a_3 < 1$. Khi đó phải có 1 biến > 1, mà ta có thể giả sử là a_1. Sử dụng mệnh đề 1 (i), ta có thể thay bộ $(a_1, a_2, ..., a_n)$ bởi bộ $(1, a_1a_2, a_3, ..., a_n)$ hoặc bộ $(a_1, 1, a_2a_3, ..., a_n)$. Chú ý là cho dù thay bởi bộ nào, thì số các biến bằng 1 cũng tăng lên ít nhất là 1. Do đó, động tác thay thế này sẽ phải dừng lại sau không quá $n-1$ lần. Khi đó, ta sẽ có $n-1$ biến ≥ 1.
***Bước 2:** Ta chứng minh luôn có thể thay $n-1$ biến ≥ 1 bởi trung bình nhân của chúng. Thật vậy, giả sử $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_{n-1} \geq 1 \geq a_n$ và đặt $x = \sqrt[n-1]{a_1, a_2, ..., a_{n-1}} \geq 1$. Nếu trong $n-1$ biến đầu tiên vẫn còn biến khác x thì $a_1 > x > a_{n-1}$. Sử dụng mệnh đề (ii) ta có thể thay bộ $(a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n)$ bởi bộ $(x, a_3, ..., \frac{a_1a_2}{x}, a_n)$. Chú ý là $\frac{a_1a_{n-1}}{x} \geq a_{n-1} \geq 1$ (vì a_1 là số lớn nhất trong các số $\{a_i\}_{i=1}^{n-1}$ nên $a_1 \geq x$) cho nên việc thay thế này vẫn đảm bảo $n-1$ biến đầu tiên ≥ 1 (để có thể thay thế liên tiếp). Chú ý rằng sau khi thay thế thì số biến bằng x tăng lên ít nhất là 1. Do đó, sau không quá $n-1$ lần thay thế thì cả $n-1$ biến đầu tiên đều bằng x.

Cuối cùng ta giải quyết bài toán 1 biến.
Xét hàm số $h(x) := g(x, x, ..., x, \frac{1}{x^{n-1}})$

$$= \ln(k) + 2(n-1)\ln((n-1)x + \frac{1}{x^{n-1}}) - (n-1)\ln(1+x^2) - \ln(1 + \frac{1}{x^{2n-2}})$$

với $x \geq 1$.
Ta có:

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2(n-1)\frac{n-1-\frac{n-1}{x^n}}{(n-1)x + \frac{1}{x^{n-1}}} - \frac{2(n-1)x}{1+x^2} - \frac{-\frac{2(n-1)}{x^{2n-1}}}{1+\frac{1}{x^{2n-2}}} \\ &= \frac{2(n-1)}{x}\left(\frac{(n-1)(x^n-1)}{(n-1)x^n+1} - \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^{2n-2}}\right) \\ &= \frac{2(n-1)}{x}\left(\frac{(n-1)(x^n-1)}{(n-1)x^n+1} - \frac{x^{2n}-1}{(1+x^2)(1+x^{2n-2})}\right) \end{aligned}$$

Chú ý là $x \geq 1$ nên để có $h'(x) \geq 0$ ta chỉ cần:

$$\frac{n-1}{(n-1)x^n+1} \geq \frac{x^n+1}{(1+x^2)(1+x^{2n-2})}$$

Ta đạt được điều này bằng đánh giá đơn giản:

$$\frac{n-1}{(n-1)x^n+1} \geq \frac{1}{x^n+1} \geq \frac{x^n+1}{(1+x^2)(1+x^{2n-2})}$$

(Có dấu $\geq$ thứ hai là do BĐT Bunhiacopski)
Vậy với $x \geq 1$ thì $h'(x) \geq 0$ nên $h(x)$ đồng biến, suy ra $h(x) \geq h(1) = 0$ và ta có đpcm.
Vậy bài toán chứng minh xong! Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n = 1$ với $n \geq 3$ (còn với $n = 1, n = 2$ thì có đẳng thức).

***Nhận xét:**
1) Bài toán này do anh Phạm Kim Hùng đặt ra dưới dạng bài toán mở và chứng minh trên đây của chúng tôi là chứng minh đầu tiên cho nó.
2) Ở đây việc xét đồng thời 2 hàm f, g cho phép ta mở rộng khả năng dồn biến: khi thì xét f đơn giản hơn, khi thì xét g đơn giản hơn. Trong bài toán 1 thì vì vấn đề đơn giản hơn nên chỉ cần một hàm f là đủ.

8. Định lý dồn biến tổng quát.

Các bạn thân mến, nói về các định lý dồn biến phải nhắc tới 2 kết quả đầu tiên hết sức ấn tượng, là định lý dồn biến mạnh (SMV) của anh Phạm Kim Hùng và định lý dồn biến không xác định (UMV) của bạn Đinh Ngọc An. Trong đó, "xương sống" của các định lý này là bổ đề dãy số, một kết quả cho ta cảm giác rõ ràng thế nào là dồn biến.

Trong mục này, chúng tôi sẽ cung cấp cho các bạn một định lý dồn biến rất tổng quát – định lý GMV của anh Phan Thành Nam – với một cách tiếp cận mới. Có thể trình bày ngắn gọn bằng cách dẫn ra định lý và chứng minh nó, tuy nhiên chúng tôi không làm như vậy vì muốn chia sẽ với các bạn cả con đường (trong tư duy) để xây dựng nó. Hi vọng là sau khi xem xong, các bạn sẽ có cảm giác là có vô số định lý dồn biến.

Chúng ta bắt đầu bằng một số định nghĩa trong không gian R^n.

Định nghĩa 1:
• Không gian R^n là tập hợp các bộ thứ tự $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ với $x_i \in R, \forall i$.
• Một dãy $\{x_m = (x_{1,m}, ..., x_{n,m})\}$ trong R^n gọi là hội tụ về $z = (z_1, ..., z_n) \in R^n$ nếu từng dãy $x_{i,m}$ hội tụ về z_i khi $m \to \infty, \forall i = 1, 2, ..., n$.
• Cho $D \subset R^n$. Một hàm số $f : D \to R$ gọi là liên tục trên D nếu: với mọi dãy $\{x_m\} \subset D$ và với mọi $z \in D$ sao cho $\{x_m\}$ hội tụ về z, thì ta đều có: $f(x_m)$ hội tụvề $f(z)$.

Định nghĩa 2: Cho $D \subset R^n$. Ta nói:
• D đóng nếu với mọi dãy $\{x_m\} \subset D$ và với mọi $z \in R^n$ sao cho $\{x_m\}$ hội tụ về z, thì ta đều có $z \in D$.
• D bị chặn nếu tồn tại số thực M sao cho: $\forall x = (x_1, ..., x_n) \in D\}$, thì $|x_i| \leq M, \forall i = 1, 2, ..., n$.

Ví dụ như một tập hợp hữu hạn thì đóng và bị chặn.

Xuất phát điểm của chúng ta là kết quả tuyệt đẹp sau đây:

Định lý 1: Cho D đóng và bị chặn trong R^n, và $f : D \to R$ liên tục. Thì f đạt giá trị nhỏ nhất trên *D*, nghĩa là tồn tại $x_0 \in D$ sao cho: $f(x_0) \leq f(x), \forall x \in R$.

Đây là một kết quả cơ bản và có trong chương trình phổ thông ở các nước, tuy nhiên ở nước ta thì nó được xem là thuộc "Toán cao cấp". Tuy nhiên, để tiện lợi cho bạn đọc chúng tôi dẫn ra đây một chứng minh mà các bạn hoàn toàn có thể hiểu được với kiến thức phổ thông.

Chúng tôi nhắc lại một kết quả có trong SGK: " mọi dãy số thực đơn điệu và bị chặn thì hội tụ". "Tiên đề" này sẽ được sử dụng để chứng minh một kết quả về dãy con.

Định nghĩa 2: Cho 1 dãy số $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ (trong R hoặc trong R^n). Một dãy $\{a_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ được gọi là một dãy con của dãy $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ nếu $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một dãy tăng ngặt các số nguyên dương.

**Ví dụ:* $\{a_{2m}\}_{m=1}^{\infty}$ là một dãy con của dãy $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$. Dưới đây các cận của chỉ số sẽ được bỏ qua nếu không gây hiểu lầm.

***Bổ đề* 1:** (Weierstrass) Mỗi dãy a_m bị chặn trong R thì có 1 dãy con hội tụ.
Chứng minh:

Ta chứng minh có một dãy con đơn điệu là xong.

Xét tập $T := \{m \in Z^+ | \exists m' > m$ sao cho $a_{m'} \geq a_m\}$. Nếu T hữu hạn thì

dãy $\{a_m\}$ sẽ giảm kể từ 1 chỉ số nào đó. Nếu T vô hạn thì ta sẽ trích được 1 dãy con tăng. Trong cả hai trường hợp thì ta luôn có 1 dãy con đơn điệu.

Bổ đề 2: (Weierstrass) Mỗi dãy a_m bị chặn trong R^n thì có 1 dãy con hội tụ.
Chứng minh:

Xét $\{a_m = (x_{1,m}, ..., x_{n,m})\}$ là một dãy bị chặn trong R^n. Khi đó dãy $\{x_{1,m}\}$ bị chặn trong R nên có 1 dãy con $\{x_{1,m_{k_1}}\}$ hội tụ. Dãy $\{x_{2,m_{k_1}}\}$ cũng bị chặn trong R nên có 1 dãy con $\{x_{2,m_{k_2}}\}$ hội tụ. Bằng cách lấy "dãy con của dãy con" liên tiếp như vậy, cuối cùng ta thu được dãy con $\{a_{m_k} = (x_{1,m_k}, ..., x_{n,m_k}\}$ mà $\forall i = 1, 2, ..., n$, ta có dãy $\{x_{i,m_k}\}$ hội tụ trong R. Điều đó cũng có nghĩa là dãy $\{a_{m_k}\}$ hội tụ trong R^n.

Bổ đề 3: (Tính đầy đủ của R) Cho A là 1 tập bị chặn trong R. Thì tồn tại $M \in R$ sao cho: $M \leq A$ (nghĩa là $M \leq a, \forall a \in A$) và có 1 dãy $\{a_k\}$ trong A hội tụ về M. Ta sẽ kí hiệu $M = infA$.
Chứng minh:

Ta chứng minh rằng $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a \in A$, $a - \varepsilon \leq A$. Giả sử ngược lại. Khi đó lấy $x_1 \in A$ tùy ý, bằng quy nạp ta xây dựng được dãy $\{x_m\}$ trong A sao cho $x_{m+1} \leq x_m - \varepsilon$, $\forall m \in Z^+$. Khi đó ta có: $x_m \leq x_1 - (m-1)\varepsilon$, $\forall m \in Z^+$ và điều này mâu thuẫn với A bị chặn dưới.

Như vậy, $\forall m \in Z^+$, tồn tại $a_m \in A$ sao cho $a_m - \frac{1}{m} \leq A$. Vì dãy $\{a_m\}$ bị chặn nên có dãy con $\{a_{m_k}\}$ hội tụ về M trong R. Ta chứng minh $M \leq A$ nữa là xong. Thật vậy, lấy $a \in A$ bất kì thì $a_{m_k} - \frac{1}{m_k} \leq a$, $\forall k \in Z^+$, nên cho $k \to \infty$ suy ra $M \leq a$.

Chứng minh định lý 1: Xét $A = f(D)$. Ta chứng minh A có phần tử nhỏ nhất.

Ta sẽ chỉ ra A có tính chất sau: nếu dãy $\{a_m\}$ chứa trong A và $a_m \to \alpha$ thì $\alpha \in A$. Thật vậy, theo định nghĩa ta có $x_m \in D$ sao cho $f(x_m) = a_m \to \alpha$. Vì dãy $\{x_m\}$ bị chặn (chứa trong D) nên có dãy con $\{x_{m_k}\}$ hội tụ về c trong R^n. Vì D đóng nên $c \in D$. Vì $f(x_m) \to \alpha$ nên Vì $f(x_{m_k}) \to \alpha$. Mặt khác, vì $\{x_{m_k}\} \to c$ và f liên tục nên $f(x_{m_k}) \to f(c)$. Vì giới hạn là duy nhất nên $f(c) = \alpha$.

Bây giờ, ta thấy A bị chặn dưới (vì từ lập luận trên với $\alpha = -\infty$ ta sẽ gặp mâu thuẫn). Do đó tồn tại $M = infA$. Do định nghĩa inf và tính chất của A vừa chỉ ra ở trên, suy ra $M \in A$. Vậy A có phần tử nhỏ nhất là M. Định lý chứng minh xong!

Định lý 1 là một mở rộng của một kết quả quen thuộc có trong SGK: "Cho $[a, b]$ là 1 khoảng đóng trong R và $f : [a, b] \to R$ liên tục, thì f có giá trị nhỏ nhất trên $[a, b]$". Do đó, về mặt trực giác thì định lý 1 khá rõ ràng. Tuy nhiên, có thể các bạn sẽ khó hình dung là định lý này thì liên quan gì đến vấn đề dồn biến? Hệ quả sau đây của định lý 1 sẽ là "chìa khóa" cho các định lý dồn biến của chúng ta. Lưu ý rằng tất cả các kết quả trong mục này không cần điều kiện f đối xứng.

Định lý 2: Cho:
- D là 1 tập đóng, bị chặn trong R^n, và Λ là 1 tập con đóng của D.
- $T : D \to D$ là một phép biến đổi bất kì.
- $f : D \to R$ là một hàm số liên tục thỏa mãn $f(x) > f(T(x)), \forall x \in D \backslash \Lambda$.

Thì ta có GTNN của f đạt được trên Λ, nghĩa là:

$$f(x) > \min_{y \in \Lambda}\{f(y)\}, \forall x \in D \backslash \Lambda.$$

Chứng minh:

Do định lý 1, tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) \leq f(x), \forall x \in D$. Nếu x_0 không thuộc Λ thì $f(x_0) > f(T(x_0))$, mâu thuẫn. Vậy $x_0 \in \Lambda$ và ta có điều phải chứng minh.

**Ghi chú:* Ta thấy phép biến đổi $T : D \to D$ nhưng thực ra trong định lý trên chỉ đòi hỏi tính chất của T trên $D \backslash \Lambda$. Do đó với $x \in \Lambda$ thì $T(x)$ có thể lấy giá trị tùy ý và ta có thể xem như $T(x) = x$. Quy ước này sẽ được sử dụng trong phần còn lại, nghĩa là $T(x) = x, \forall x \in \Lambda$ và ta chỉ quan tâm giá trị của T trên $D \backslash \Lambda$.

Đây là một hệ quả quá đơn giản phải không các bạn, tuy nhiên ý tưởng dồn biến của nó đã lộ rõ. Để minh họa, chúng tôi dẫn ra đây một chứng minh cho BĐT Cauchy.

Bài toán 1: (BĐT Cauchy) Cho n số thực không âm $x_1, ..., x_n$. Chứng minh rằng:

$$x_1 + ... + x_n \geq n\sqrt[n]{x_1...x_n}$$

Chứng minh:

Bằng cách chuẩn hóa, ta có thể giả sử $x_1...x_n = 1$ và chứng minh $x_1 + ... + x_n \geq n$. Tất nhiên ta chỉ cần xét khi $x_i \leq n, \forall i$.

Xét: $D = \{x = (x_1, ..., x_n) | x_i \in [0, n], x_1...x_n = 1\}$ thì dễ thấy D đóng và bị chặn. Xét $\Lambda = \{x_0 = (1, 1, 1, ..., 1)\}$.

Xét $f : D \to R$ liên tục như sau: với mỗi $x = (x_1, ..., x_n) \in D$

thì $f(x) = x_1 + ... + x_n$. Xét $T : D\backslash\Lambda \to D$ như sau: Với mỗi $x = (x_1, ..., x_n) \in D\backslash\Lambda$, thì tồn tại $x_i \neq x_j$ và ta đặt $T(x)$ là bộ thu được từ x sau khi thay x_i và x_j bởi trung bình nhân của chúng, khi đó dễ thấy $f(x) - f(T(x)) = (\sqrt{x_i} - \sqrt{x_j})^2 > 0$.

Vậy ta có thể áp dụng định lí 2 để suy ra $f(x) \geq f(x_0), \forall x \in D$, hơn nữa dấu " = " chỉ xảy ra khi $x = x_0$.

Trong nhiều trường hợp, có thể hàm f sẽ không đủ tốt và ta sẽ chỉ có có điều kiện $f(x) \geq f(T(x))$. Tất nhiên khi đó ta không thể áp dụng định lý 1. Một đòi hỏi hợp lý là phép biến đổi T phải đủ tốt để bù lại (nhớ là phép biến đổi T là do ta chọn). Điều này đưa đến:

Định lý 3: Cho:
• D là 1 tập đóng, bị chặn trong R^n, và Λ là 1 tập con đóng của D.
• $T : D \to D$ là 1 phép biến đổi sao cho tồn tại một hàm số h liên tục $D \to R$ thỏa mãn: $h(T(x)) < h(x), \forall x \in D\backslash\Lambda$.
• $f : D \to R$ là một hàm số liên tục thỏa mãn $f(x) \geq f(T(x)) \forall x \in D$.

Thì ta có GTNN của f trên D cũng là GTNN của f trên Λ, nghĩa là:

$$f(x) \geq \min_{y \in \Lambda}\{f(y)\}, \forall x \in D.$$

Mặc dù là trường hợp riêng của một định lý tổng quát hơn ở cuối bài, nhưng vì tầm quan trọng của định lý này nên chúng tôi vẫn dẫn ra đây một chứng minh cho nó.

Chứng minh:

Lấy $y_0 \in \Lambda$ sao cho $f(y_0) = \min_{y \in \Lambda}\{f(y)\}$. Giả sử phản chứng rằng tồn tại $z \in D$ sao cho $f(z) < f(y_0)$. Tất nhiên ta có thể giả sử $h(x) \geq 0, \forall x \in D$ (nếu không chỉ việc thay h bởi $h' = h - M$, với M là GTNN của h trên D). Chọn $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ ta có: $f(z) + \varepsilon h(z) < f(y_0)$. Đặt $g(x) := f(x) + \varepsilon h(x)$, $\forall x \in D$. Thì $g : D \to R$ liên tục, $g(x) > g(T(x)) \forall x \in D\backslash\Lambda$ và $g(z) < f(y_0) \leq \min_{y \in \Lambda}\{g(y)\}$. Điều này mâu thuẫn với định lý 2.

Sau đây là một hệ quả ấn tượng của định lý 3.

Hệ quả 1: (SMV-Strongly Mixing Variables) Cho:
• $D \in R^n$, $D = \{x = (x_1, ..., x_n) | x_i \geq \alpha, \sum x_i = ns = const\}$ và $s_0 := (s, s, ..., s) \in D$.
• Phép biến đổi $T : D \to D$ như sau: với mỗi phần tử $a = (a_1, .., a_n) \in D$, $a \neq s_0$, ta chọn ra 2 chỉ số $i \neq j$ nào đó (tùy theo hàm f bên dưới) sao cho

$a_i \neq a_j$, rồi thay a_i, a_j bởi trung bình cộng của chúng.
• $f : D \to R$ là hàm số liên tục thỏa mãn: $f(a) \geq f(T(a)), \forall a \in D$.
Khi đó: $f(a) \geq f(s_0), \forall a \in D$.
Chứng minh: Với phép biến đổi T như vậy, ta chọn $h(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \forall x = (x_1, ..., x_n) \in D$. Áp dụng định lý 3 (ở đây $\Lambda = \{s_0\}$).
**Nhận xét:* Thông thường, trong áp dụng ta sẽ lấy a_i, a_j là min và max của $\{a_1, ..., a_n\}$. Khi đó, có thể chứng minh từ 1 phần tử bất kì của D, sau vô hạn lần lặp T sẽ thu được $(s, s, ..., s)$, và sử dụng tính liên tục của f ta cũng thu được kết luận.

Riêng trong trường hợp này (min và max) thì không nhất thiết thay a_i, a_j bởi trung bình cộng mà có thể tổng quát hơn:
Hệ quả 2: Cho:
• $D \in R^n$ đóng và bị chặn. Gọi Λ là tập hợp các phần tử trong D có dạng $(s, s, ..., s)$, và giả sử Λ khác rỗng.
• Phép biến đổi $T : D \to D$ như sau: với mỗi phần tử $a = (a_1, .., a_n) \in D \backslash \Lambda$, ta chọn ra 2 chỉ số $i \neq j$ sao cho a_i, a_j là min và max của $\{a_1, ..., a_n\}$, sau đó thay a_i, a_j bởi $\alpha, \beta \in (a_i, a_j)$.
• $f : D \to R$ là hàm số liên tục thỏa mãn: $f(a) \geq f(T(a)), \forall a \in D$.
Khi đó:

$$f(x) \geq \min_{y \in \Lambda}\{f(y)\}, \forall x \in D.$$

Chứng minh: Một cách tự nhiên, ta hi vọng vào hàm

$$h(a) = max\{a_1, ..., a_n\} - min\{a_1, ..., a_n\}, \forall a = (a_1, ..., a_n) \in D$$

Tuy nhiên, ta không có ngay $h(a) > h(T(a)), \forall a \in D \backslash \Lambda$. Đó là vì trong n số $a_1, ..., a_n$ có thể có nhiều số bằng nhau và bằng max hay min của $\{a_1, ..., a_n\}$. Nhưng ta chỉ việc thay T bởi $T^* = T^n$ (T^k nghĩa là lặp lại T với k lần) thì $h(a) > h(T^*(a)), \forall a \in D \backslash \Lambda$ và ta có thể áp dụng định lý 3.

Tuy nhiên, đôi khi chỉ 1 phép biến đổi T sẽ không đủ, ví dụ như khi ta chưa biết chính xác là dồn biến về biên hay về tâm. Do đó, định lý 3 được mở rộng thành định lý dồn biến tổng quát sau đây.

Định lý 4: (GMV – General Mixing Variables) Cho:
• D là 1 tập đóng, bị chặn trong R^n, và Λ là 1 tập con đóng của D.
• $T_j : D \to D$ là các phép biến đổi sao cho tồn tại các hàm số h_j liên tục $D \to R$ thỏa mãn: $h(T_j(x)) < h_j(x), \forall x \in D \backslash \Lambda, \forall j \in \{1, ..., k\}$.

• $f : D \to R$ liên tục thỏa mãn $f(x) \geq \min\limits_{j\in\{1,...,k\}}\{f(T_j(x))\}, \forall x \in D$.

Thì $f(x) \geq \min\limits_{y\in\Lambda}\{f(y)\}, \forall x \in D$.

Ta sử dụng lại chứng minh của định lý 3 cùng với 1 cải tiến nhỏ.

Chứng minh:

Lấy $y_0 \in \Lambda$ sao cho $f(y_0) = \min\limits_{y\in\Lambda}\{f(y)\}$. Giả sử phản chứng rằng tồn tại $z \in D$ sao cho $f(z) < f(y_0)$. Tất nhiên ta có thể giả sử $h_j(x) \geq 0, \forall x \in D, \forall j = 1, ..., k$. Chọn $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ ta có: $f(z)+\varepsilon h_j(z) < f(y_0), \forall j = 1, ..., k$. Đặt $g_j(x) := f(x) + \varepsilon h_j(x)$, $\forall x \in D, \forall j = 1, ..., k$.

Đặt $g(x) = min\{g_1(x), ..., g_k(x)\}, \forall x \in D$. Thì $g : D \to R$ liên tục, $g(x) > g(T(x)) \forall x \in D\backslash\Lambda$ và $g(z) < f(y_0) \leq \min\limits_{y\in\Lambda}\{g(y)\}$. Điều này mâu thuẫn với định lý 2.

**Chi chú:* Ta đã sử dụng kết quả là nếu g_j là các hàm liên tục thì $g = min\{g_1, ..., g_k\}$ cũng là hàm liên tục. Tất nhiên ta chỉ cần chứng minh với $k = 2$, và trong trường hợp này thì chỉ cần để ý là $min\{g_1, g_2\} = \frac{1}{2}(g_1 + g_2 - |g_1 - g_2|)$. Còn sự kiện $g(x) > g(T(x)), \forall x \in D\backslash\Lambda$ thì rất rõ ràng, vì nếu $u_j > v_j, \forall j = 1, ..., k$ thì $min\{u_1, ..., u_k\} > min\{u_1, ..., u_k\}$.

Các bạn thân mến, tuy hình thức phát biểu ngắn gọn nhưng GMV có tầm ứng dụng cực kì rộng rãi. Cứ mỗi một (hay một vài) phép biến đổi T thích hợp là ta lại có một định lý dồn biến mới. Chúng tôi kết thúc mục này bằng một hệ quả của GMV, mà có thể xem là sự mở rộng của SMV ở Hệ quả 2. Cũng xin lưu ý rằng các kết quả có tên SMV và UMV ở đây tổng quát hơn so với các định lý cùng tên mà chúng tôi đã dẫn ra ban đầu.

Hệ quả 3: (UMV – Undefined Mixing Variables) Cho:

• $D \subset \{x = (x_1, ..., x_n) \in R^n | x_i \geq 0, \forall i = 1, ..., n\}$, D đóng và bị chặn. Gọi Λ là tập hợp các phần tử trong D có t thành phần bằng 0 và $n - t$ thành phần bằng nhau ($t \geq 0$).

• 2 phép biến đổi $T_1, T_2 : D \to D$ như sau: với mỗi phần tử $a = (a_1, .., a_n) \in D\backslash\Lambda$, chọn ra 2 chỉ số $i \neq j$ sao cho $a_i = min\{a_t > 0, t = 1, ..., n\}$ và $a_j = max\{a_1, ..., a_n\}$, sau đó thay a_i, a_j bởi $\alpha, \beta \in (a_i, a_j)$ (ứng với T_1) và $\alpha' < a_i < a_j < \beta'$ (ứng với T_2).

• $f : D \to R$ liên tục thỏa mãn: $f(a) \geq min\{f(T_1(a)), f(T_1(a))\}$, $\forall a \in D$.

Thì

$$f(x) \geq \min_{y\in\Lambda}\{f(y)\}, \forall x \in D.$$

Chứng minh:

Chọn $h_1(a) = max\{a_1, ..., a_n\} - min\{a_1, ..., a_n\}$ và $h_2(a) = -h_1(a)$, $\forall a = (a_1, ..., a_n) \in D$. Tương tự như hệ quả 2, ta thay T_1 bởi $T_1^* = T_1^n$ và $T_2^* = T_2^n$ để có: $h_1(a) > h_1(T_1^*(a))$, $h_2(a) > h_2(T_2^*(a))$, $\forall a = (a_1, ..., a_n) \in D$. Áp dụng GMV ta có điều phải chứng minh.

9. Nhìn lại.

Các bạn thân mến, có lẽ bây giờ là lúc tạm dừng để nhìn lại hành trình vừa qua. Như chúng tôi đã nói trong \$6, dồn biến đã được biết đến từ rất sớm thông qua hàm lồi và dẫn đến các kết quả tuyệt đẹp. BĐT Jensen có thể xem như một tiêu chuẩn để dồn biến về tâm một cách toàn cục. Về các kết quả này, các bạn có thể tìm đọc một cách rất đầy đủ trong cuốn "Bất đẳng thức" nổi tiếng của 3 nhà toán học $Hardy - Polya - Littewood$.

Trong trường hợp 3 biến, có lẽ quen thuộc nhất với bạn đọc là những BĐT lượng giác, chẳng hạn như:

$$sinA + sinB + sinC \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \qquad (1)$$
$$cosA + cosB + cosC \leq \frac{3}{2} \qquad (2)$$

với A, B, C là 3 cạnh 1 tam giác.

BĐT (1) có thể thu được ngay bằng cách áp dụng BĐT Jensen cho hàm lồi. BĐT (2) thì tinh tế hơn, hàm $f(x) = -cosx$ có $f''(x) = cosx$ nên chỉ lồi trên $[0, \pi]$. Do đó ta không thể áp dụng ngay BĐT Jensen cho 3 biến A,B,C. Tuy nhiên, ta có thể giả sử $A \leq B \leq C$ và khi đó thì $A, B \in [0, \pi]$ nên ta có thể dồn 2 biến A, B về bằng nhau. Sau đó bài toán chỉ còn một biến và trở nên đơn giản.

Như vậy, tư tưởng dồn biến đã dần lộ rõ. Thay vì mong muốn có ngay một cách dồn biến toàn cục, chúng ta hi vọng có thể từng bước đơn giản bài toán bằng cách giảm dần số biến. Đây chính là tư tưởng chính của phương pháp dồn biến. Trong trường hợp 3 biến, sau khi thực hiện được động tác dồn biến (bất kể là về 2 biến bằng nhau, hay dồn 1 biến ra biên, hay dồn 1 biến về giá trị trung bình) thì gần như bài toán chỉ còn 1 biến và xem như giải quyết đơn giản. Do đó, phép dồn biến không cần tác dụng với 2 biến bất kì mà có thể tận dụng thứ tự sắp được giữa các biến nếu BĐT là đối xứng.

Các bạn thân mến, chúng tôi dành ra 3 mục để khảo sát vấn đề dồn biến cho BĐT 3 biến cũng chỉ là để các bạn nắm được tư tưởng của phương pháp, chứ không phải liệt kê tất cả các kĩ thuật cần thiết. Chẳng hạn như dồn biến trong BĐT lượng giác với các BĐT tuyệt đẹp của Jackgarfulkel (xem phần bài tập) cũng khá thú vị. Tuy nhiên chúng tôi nghĩ rằng trình bày tất cả sẽ nhàm chán và vô vị, vì một khi nắm được tư tưởng chính thì các bạn có thể áp dụng trong vô vàn trường hợp khác nhau.

Đọc xong phần BĐT 3 biến, có lẽ bạn đọc sẽ có cảm giác là hình như mọi BĐT đều có thể chuyển về trường hợp 2 biến bằng nhau hoặc 1 biến đạt giá trị tại biên. Phải nói rằng điều này đúng cho hầu hết các BĐT mà chúng ta đã gặp. Tuy nhiên, ngay sau đây chúng tôi sẽ cung cấp cho các bạn một ví dụ nằm ngoài "thông lệ" đó. Trong ví dụ này, thậm chí BĐT đang xét là đa thức đối xứng thuần nhất 3 biến. Ví dụ này lấy từ ý tưởng của anh Bùi Việt Anh.

Bài toán 1. Cho $a, b, c \geq 0$. Khi đó BĐT:

$$(a^3 + b^3 + c^3 - 6abc)^2 + ((a + b + c)^3 - 36abc)^2 \geq 0$$

chỉ xảy ra dấu "=" trong trường hợp $(a, b, c) = (t, 2t, 3t), t \geq 0$ (và các hoán vị).

Bạn đọc tự kiểm tra điều đó.

Như vậy, các bạn có thể yên tâm là phương pháp dồn biến có ý nghĩa.

Với bài toán 4 biến thì thông thường chúng ta phải thực hiện hơn 1 lần động tác dồn biến nên sẽ phức tạp hơn. Trong trường hợp n biến tổng quát thì việc dồn biến trở nên cực kì khó khăn. Ngoài BĐT Jensen cho phép dồn 1 lúc cả n biến (nhưng đáng tiếc, nó chỉ giải quyết được 1 lượng khá nhỏ các BĐT) thì gần như ta không có công cụ nào khác. Trong trường hợp này, thông thường quy nạp cũng là một ý hay. Chúng tôi dẫn ra đây một ví dụ cho thấy sự tinh tế của chứng minh quy nạp trong BĐT.

Bài toán 2. (Phạm Kim Hùng) Cho n số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$ có tích bằng 1. Chứng minh rằng với mọi $k > 0$ thì:

$$\frac{1}{(1 + a_1)^k} + \frac{1}{(1 + a_2)^k} + ... + \frac{1}{(1 + a_n)^k} \geq \min\{1, \frac{n}{2^k}\}$$

Bài toán này đã được đưa lên Diễn Đàn Toán Học với tên gọi là Thách Thức 1, và là một bài rất khó. Tuy nhiên, nó sẽ vô cùng đơn giản nếu ta

làm việc với bài toán tổng quát hơn:
"Cho n số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$ có tích bằng $s \geq 1$. Chứng minh rằng với mọi $k > 0$ thì:

$$\frac{1}{(1+a_1)^k} + \frac{1}{(1+a_2)^k} + ... + \frac{1}{(1+a_n)^k} \geq \min\{1, \frac{n}{1+\sqrt[n]{s}}\}."$$

Với bài toán tổng quát hơn này thì lại có thể chứng minh bằng quy nạp. Thật vậy, xét bài toán với n số, ta có thể giả sử $a_n = min\{a_1, ..., a_n\}$. Khi đó áp dụng giả thiết quy nạp cho $(n-1)$ số $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ có tích ≥ 1, ta đưa được ngay bài toán về 1 biến. Công việc còn lại chỉ là khảo sát hàm một biến.

Một kĩ thuật khác để đưa các BĐT n biến về 1 biến là dồn biến về giá trị trung binh trong $7. Như chúng tôi đã chỉ ra, ý tưởng cách dồn này dựa trên cách dồn biến về giá trị trung bình cho hàm lồi. Đây là cách dồn biến rất tốt vì nó có tính hữu hạn. Tuy nhiên, nó chỉ áp dụng được cho các bài cực trị đạt được tại tâm.

Bây giờ ta phải đối mặt với khả năng cực trị đạt tại cả tâm và biên. Rõ ràng khả năng dồn về một biến là không cao. Do đó chúng ta hi vọng vào điều tốt nhất là có một cách dồn biến toàn cục, đại loại như BĐT Jensen. Với mục tiêu đó, 2 định lý tuyệt đẹp phải kể đến là định lý SMV (dồn biến mạnh) và UMV (dồn biến không xác định). Hai định lý này có thể nói là "anh em song sinh". SMV dùng để "chuyên trị" các BĐT cực trị đạt được tại tâm, trong đó cải tiến đáng kể nhất là không cần dồn được 2 biến bất kì về bằng nhau mà chỉ cần dồn biến lớn nhất và biến nhỏ nhất. UMV thì đòi hỏi giả thiết đặt lên 2 biến bất kì, tuy nhiên nó cho phép ta dung hòa cả 2 trường hợp cực trị đạt được tại tâm và tại biên dưới một dạng tổng quát. Để cho hình thức đơn giản, 2 định lý này đều chỉ xét cho hàm đối xứng.

Chúng tôi đã quan sát 2 kết quả trên và nhận thấy sự không cần thiết của việc tách rời 2 trường hợp, và đã tìm ra một kết quả hội tụ đầy đủ ưu điểm của 2 định lý trên. Tuy nhiên nó chỉ là một trường hợp riêng của Hệ quả 3 trong $8. Định lý GMV không chỉ đơn thuần là tổng quát 2 định lý kể trên, mà nó mở ra một chân trời mới với vô vàn các kiểu dồn biến . Một điều kì lạ là ở đây chỉ đòi hỏi: nếu bộ $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ chưa rơi vào các trường hợp "tới hạn" (tức là thuộc Λ), thì luôn có thể thay thế bằng 1 bộ (là $T(x)$). Nếu như trong SMV ("cổ điển"), sự kiện dồn 2 biến, lớn nhất và

nhỏ nhất, về bằng nhau có thể dẫn đến một cảm nhận rõ ràng là n biến sẽ tiến về giá trị trung bình, thì trong trường hợp này bổ đề dãy số không còn tác dụng. Tuy nhiên, kết quả vẫn được chỉ ra.

Các bạn thân mến, các bạn đã cùng chúng tôi đi trên một hành trình, mà chúng tôi chọn vì nó tốt nhất chứ không phải là đầy đủ nhất. Có nhiều vấn đề chúng tôi không đưa ra, hoặc không trình bày kĩ, vì chúng tôi không coi trọng sự đầy đủ. Cái mà chúng tôi coi trọng là cố gắng để các bạn thấy được vấn đề một cách nhanh chóng, rõ ràng và hợp lý. Hi vọng với những tư tưởng mà chúng tôi đã khơi gợi các bạn sẽ đủ cảm hứng và khả năng để tiếp bước trên con đường sáng tạo.

Cuối cùng, chúng tôi muốn gửi lời cảm ơn đặc biệt tới anh Phan Thành Nam và anh Phạm Kim Hùng, những người đã có rất nhiều kết quả và ý tưởng được sử dụng. Chúng tôi cũng xin chân thành cảm ơn tất cả tác giả các bài toán, các nguồn trích dẫn, trong đó có thầy Phạm Văn Thuận – người đã cung cấp cho chúng tôi một tài liệu về dồn biến có giá trị.

10. Bài tập.

Sau đây là một số bài tập dành cho bạn đọc. Hi vọng các bạn sẽ tìm được nhiều niềm vui khi thử sức với chúng. *(ghi chú: Θ bài dễ, Φ bài trung bình, Ξ bài khó, Ψ bài cực khó)*

Θ **Bài tập 1:** (Asian Pacific Math.2004) Giả sử a, b, c là các số dương tùy ý. Chứng minh BĐT

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 9(ab+bc+ca)$$

Θ **Bài tập 2:** (MOSP 2001) Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số dương có tích bằng 1 thì ta có BĐT

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 4(a+b+c-1)$$

Θ **Bài tập 3:** Cho a, b, c không âm thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng

$$a+b+c \geq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$$

Θ **Bài tập 4:** (Huỳnh Tấn Châu) Cho $x, y, z \geq 0$ và $x + y + z = 1$.Chứng minh rằng:

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz \geq \frac{1}{4}$$

Θ **Bài tập 5:** Chứng minh rằng nếu x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ thì ta có BĐT:

$$7(xy + yz + zx) \leq 12 + 9xyz$$

Φ **Bài tập 6:** (Chọn đội tuyển Việt Nam 1996) Cho a, b, c là các số thực bất kì, chứng minh rằng:

$$F(a, b, c) = (a + b)^4 + (b + c)^4 + (c + a)^4 - \frac{4}{7}(a^4 + b^4 + c^4) \geq 0$$

Φ **Bài tập 7:** (Phạm Văn Thuận−Zhao Bin). Giả sử x, y, z là ba số thực không âm nhưng chỉ có nhiều nhất một số bằng 0. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{x^3 + y^3} + \frac{1}{y^3 + z^3} + \frac{1}{z^3 + x^3} \geq \frac{20}{(a + b + c)^3}$$

Φ **Bài tập 8** (Phạm Kim Hùng). Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c không âm ta luôn có BĐT:

$$\frac{1}{\sqrt{4a^2 + bc}} + \frac{1}{\sqrt{4b^2 + ca}} + \frac{1}{\sqrt{4c^2 + ab}} \geq \frac{4}{a + b + c}$$

Φ **Bài tập 9:** (Murray Klamkin) Chứng minh rằng với các số thực không âm a, b, c có tổng bằng 2, thì

$$(a^2 + ab + b^2)(b^2 + bc + c^2)(c^2 + ca + a^2) \leq 3$$

Ξ **Bài tập 10:** (Tổng quát RMO2000) Cho $a, b, c \geq 0$ và $a + b + c = 3$. Tìm hằng số $k > 0$ nhỏ nhất sao cho BĐT sau luôn đúng:

$$a^k + b^k + c^k \geq ab + bc + ca$$

Ξ **Bài tập 11:** (Trung Quốc 2005) Cho $a, b, c > 0$ và $ab + bc + ca = 1/3$.

Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2-bc+1}+\frac{1}{b^2-ca+1}+\frac{1}{c^2-ab+1}\leq 3$$

Ξ **Bài tập 12:** (mathlinks) Cho $a,b,c\geq 0$ và $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1+a^2b^2}{(a+b)^2}+\frac{1+b^2c^2}{(b+c)^2}+\frac{1+c^2a^2}{(c+a)^2}\geq\frac{5}{2}$$

Ξ **Bài toán 13** Cho $a,b,c\in[p,q]$ với $0<p\leq q$. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$$

Bài toán 14.(Jackgarfulkel) Cho tam giác nhọn ABC. Chứng minh rằng:
Φ a)

$$sin\frac{A}{2}+sin\frac{B}{2}+sin\frac{C}{2}\geq\frac{4}{3}(1+sin\frac{A}{2}sin\frac{B}{2}sin\frac{C}{2})$$

Φ b)

$$cos\frac{A}{2}+cos\frac{B}{2}+cos\frac{C}{2}\geq\frac{4}{\sqrt{3}}(1+cos\frac{A}{2}cos\frac{B}{2}cos\frac{C}{2})$$

Φ **Bài toán 15.**(Jackgarfulkel) Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$cos(\frac{A-B}{2})+cos(\frac{B-C}{2})+cos(\frac{C-A}{2})\geq\frac{2}{\sqrt{3}}(sinA+sinB+sinC)$$

Ξ **Bài toán 16** (Phan Thành Nam) Cho ba số thực x,y,z không âm có tổng bằng 1. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x+y^2}+\sqrt{y+z^2}+\sqrt{z+x^2}\geq 2$$

Ξ **Bài tập 17** (Vasile Cirtoaje) Xét ba số thực không âm a,b,c thỏa điều kiện $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1-ab}+\frac{1}{1-bc}+\frac{1}{1-ca}\leq\frac{9}{2}$$

Ξ **Bài tập 18:** (Phan Thành Nam) Cho $a, b, c \geq 0$ và thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:
a) (VMEO1)

$$\sqrt{a+\frac{(b-c)^2}{12}}+\sqrt{b+\frac{(c-a)^2}{12}}+\sqrt{c+\frac{(a-b)^2}{12}} \leq \sqrt{3}$$

b)

$$\sqrt{a+k(b-c)^2}+\sqrt{a+k(b-c)^2}+\sqrt{a+k(b-c)^2} \leq \sqrt{3}$$

Trong đó $k=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ξ **Bài toán 19** (Phan Thành Việt) Cho tam giác ABC có độ dài 3 cạnh là $BC=a, CA=b, AB=c$. Gọi p là nửa chu vi của tam giác và m_a, m_b, m_c là độ dài ba đường trung tuyến tương ứng hạ từ A, B, C xuống các cạnh đối diện. Chứng minh rằng:

$$m_a+m_b+m_c \leq \sqrt{3p^2+\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]}$$

Bài tập 20: (Phan Thành Nam) Cho $x, y, z \in [-1, 1]$ và $x+y+z=0$. Chứng minh rằng
Ξ a)

$$\sqrt{1+x+y^2}+\sqrt{1+y+z^2}+\sqrt{1+z+x^2} \geq 3$$

Ψ b)

$$\sqrt{1+x+\frac{7}{9}y^2}+\sqrt{1+y+\frac{7}{9}z^2}+\sqrt{1+z+\frac{7}{9}x^2} \geq 3$$

Φ **Bài tập 21** (Phạm Kim Hùng) Cho $x, y, z, t \geq 0$ và $x+y+z+t=4$. Chứng minh rằng:

$$(1+3x)(1+3y)(1+3z)(1+3t) \leq 125+131xyzt$$

Φ **Bài tập 22** (Bất đẳng thức Tukervici) Với mọi số thực dương a, b, c, d thì

$$a^4+b^4+c^4+d^4+2abcd \geq a^2b^2+b^2c^2+c^2d^2+d^2a^2+a^2c^2+b^2d^2$$

Φ **Bài tập 23** (Phạm Văn Thuận– Nguyễn Anh Tuấn) Xét 4 số thực a, b, c, d thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$.Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-cd} + \frac{1}{1-da} + \frac{1}{1-db} + \frac{1}{1-ca} \leq 8$$

Ξ **Bài tập 24** (Phạm Kim Hùng) Cho các số thực không âm a, b, c, d, k có tổng bằng 4. Chứng minh rằng

$$(abc)^k + (bcd)^k + (cda)^k + (dab)^k \leq max\{4, (\frac{4}{3})^{3k}\}$$

Ξ **Bài tập 25** (Phan Thành Nam)
Cho các số thực x, y, z, t thỏa: $max\{xy, yz, zt, tx\} \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{1-xy+y^2} + \sqrt{1-yz+z^2} + \sqrt{1-zt+t^2} + \sqrt{1-tx+x^2} \geq \sqrt{16+(x-y+z-t)^2}$$

Ψ **Bài tập 26** (Phan Thành Nam) Cho các số thực $x, y, z, t \in [-1, 1]$ thỏa mãn $x + y + z + t = 0$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{1+x+y^2} + \sqrt{1+y+z^2} + \sqrt{1+z+t^2} + \sqrt{1+t+x^2} \geq 4$$

(*Ghi chú: Bài này xuất phát từ trường hợp ba số trong bài $20a$, dĩ nhiên sẽ khó hơn rất nhiều. BĐT tương tự với 5 số không còn đúng nữa)

Φ **Bài tập 27** (Vasile Cirtoaje) Chứng minh rằng nếu $a_1, a_2, ..., a_n$ không âm và có tổng bằng n thì

$$(n-1)(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2) + na_1a_2...a_n \geq n^2$$

Ξ **Bài tập 28:** (Phạm Kim Hùng) Giả sử $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực không âm có tổng bằng n. Tìm gtnn của biểu thức

$$S = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 + a_1a_2...a_n(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n})$$

Ξ **bài tập 29** Tìm hằng số dương k_m tốt nhất để BĐT sau luôn đúng với mọi dãy số thực không âm $x_1, x_2, ..., x_n$ có tổng bằng n

$$(1 + mx_1)(1 + mx_2)...(1 + mx_n) \leq (m + 1)^n + k_m(x_1x_2...x_n - 1)$$

trong đó m là hằng số dương bất kì.

Bài toán 30 (Phan Thành Việt) Cho $a_1, a_2, ..., a_n, s, k$ là các số thực dương thỏa mãn: $a_1a_2...a_n = s^n$ và $n - 1 = \frac{n}{(1+s)^k}$. Xét BĐT:

$$\frac{1}{(1 + a_1)^k} + \frac{1}{(1 + a_2)^k} + ... + \frac{1}{(1 + a_n)^k} \leq n - 1$$

Θ a) Chứng minh rằng BĐT trên nói chung không đúng.
Φ b) (VMO 1999) Chứng minh BĐT trên đúng trong trường hợp $k = 1$.
Ψ c) Tìm tất cả các giá trị k (tùy thuộc n) để BĐT trên đúng.